Automaty a gramatiky

8

Roman Barták, KTIML

bartak@ktiml.mff.cuni.cz
http://ktiml.mff.cuni.cz/~bartak

Zásobníkový automat

Zásobníkovým automatem nazýváme sedmici

$$M = (Q,X,Y,\delta,q_0,Z_0,F),$$

kde

- Q - neprázdná konečná množina stavů
- X - neprázdná konečná vstupní abeceda
- Y - neprázdná konečná zásobníková abeceda
- δ - přechodová funkce $Q\times(X\cup\{\lambda\})\times Y \rightarrow P_{FIN}(Q\times Y^*)$
- $q_0\in Q$ - počáteční stav
- $Z_0 \in Y$ - počáteční zásobníkový symbol
- F - množina koncových stavů

Poznámky:

- ZA je z principu nedeterministický
- vždy nahrazujeme vrchol zásobníku
- nemusíme číst vstupní symbol

Výpočet zásobníkového automatu

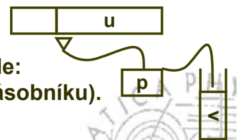
Instrukci $(p,a,Z) \rightarrow (q,w)$ ($(q,w)\in\delta(p,a,Z)$) lze vykonat, pokud:

- stav automatu je p
- na vstupu je symbol *a* (pouze pokud $a\neq\lambda$)
- na vrcholu zásobníku je symbol Z

Vykonání instrukce $(p,a,Z) \rightarrow (q,w)$ znamená:

- změnu stavu automatu z *p* na *q*
- je-li $a\neq\lambda$, posun čtecí hlavy (přečtení písmene *a*)
- smazání vrchního symbolu zásobníku (symbolu Z)
- přidání slova *w* na zásobník (nejvýše bude první písmeno z *w*)

Formalizace kroku zásobníkového automatu:



Situace zásobníkového automatu je trojice (p,u,v), kde:
$p\in Q$, $u\in X^*$ (zbytek čteného slova), $v\in Y^*$ (obsah zásobníku).

Situace $E_1=(p,au,Zv)$ *vede bezprostředně na situaci*
$E_2=(q,u,wv)$, když $p,q\in Q$, $u\in X^*$, $v,w\in Y^*$, $a\in X\cup\{\lambda\}$, $Z\in Y$, $(q,w)\in\delta(p,a,Z)$.
Píšeme $E_1 \vdash E_2$.

Situace E *vede na situaci* E' ($E \vdash^* E'$), právě když $E\vdash E_1$, $E_1\vdash E_2 \dots E_n\vdash E'$

Zásobníkové automaty a jazyky

Kdy končí výpočet zásobníkového automatu:

- zásobník je prázdný
- není definována žádná instrukce

Přijímání koncovým stavem
slovo je celé přečteno a jsme v koncovém stavu

Přijímání prázdným zásobníkem
slovo je celé přečteno a zásobník je vyprázdněný

Nechť M je zásobníkový automat.

Jazyk rozpoznávaný automatem M *koncovým stavem* definujeme takto: $L(M) = \{w \mid w\in X^*, v\in Y^*, q\in F\ (q_0,w,Z_0)\vdash^*(q,\lambda,v)\}$.

Jazyk rozpoznávaný automatem M *prázdným zásobníkem* definujeme takto: $N(M) = \{w \mid w\in X^*, q\in Q\ (q_0,w,Z_0)\vdash^*(q,\lambda,\lambda)\}$.
Koncové stavy nás tady nezajímají, proto klademe $F=\emptyset$.

Zásobníkový automat v příkladě

$L = \{0^n1^n \mid n>0\}$

Přijímání prázdným zásobníkem

p-počáteční stav, Z-počáteční zásobníkový symbol

$\delta(p,0,Z) = \{(p,A)\}$ … čte první symbol 0

$\delta(p,0,A) = \{(p,AA)\}$ … čte další symboly 0

$\delta(p,1,A) = \{(q,\lambda)\}$ … čte první symbol 1

$\delta(q,1,A) = \{(q,\lambda)\}$ … čte další symboly 1

Přijímání koncovým stavem

p-počáteční stav, q_F-koncový stav, Z-počáteční zásobníkový symbol

$\delta(p,0,Z) = \{(p,AZ)\}$ … čte první symbol 0

$\delta(p,0,A) = \{(p,AA)\}$ … čte další symboly 0

$\delta(p,1,A) = \{(q,\lambda)\}$ … čte první symbol 1

$\delta(q,1,A) = \{(q,\lambda)\}$ … čte další symboly 1

$\delta(q,\lambda,Z) = \{(q_F,\lambda)\}$ … končí

Přijímání zásobníkem ⇒ přijímání stavem

Pro každý zásobníkový automat M_1 existuje ekvivalentní zásobníkový automat M_2 tak, že $N(M_1)=L(M_2)$ (prázdný zásobník → koncový stav).

Důkaz (konstruktivní):

idea:

- na zásobník přidáme speciální symbol,
- běžíme stejně jako M_1,
- je-li na zásobníku speciální symbol, končíme

formálně:

$M_1 = (Q_1,X,Y_1,\delta_1,q_1,Z_1,\{\}) \rightarrow M_2 = (Q_2,X,Y_2,\delta_2,q_2,Z_2,\{q_F\})$,

$q_2,q_F \notin Q_1$, $Q_2 = Q_1 \cup \{q_2,q_F\}$,

$Z_2 \notin Y_1$, $Y_2 = Y_1 \cup \{Z_2\}$,

δ_2 „=" δ_1 + $\delta_2(q_2,\lambda,Z_2)=\{(q_1,Z_1Z_2)\}$ + $\forall q\in Q_1\ \delta_2(q,\lambda,Z_2)=\{(q_F,\lambda)\}$

$N(M_1)=L(M_2)$?

$w\in N(M_1) \Leftrightarrow (q_1,w,Z_1) \vdash^*_{M1} (q,\lambda,\lambda)$

$\Leftrightarrow (q_2,w,Z_2) \vdash_{M2} (q_1,w,Z_1Z_2) \vdash^*_{M2} (q,\lambda,Z_2) \vdash_{M2} (q_F,\lambda,\lambda)$

$\Leftrightarrow w\in L(M_2)$

Příklad převodu

$L = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$

$M_1 = (\{p,q\}, \{0,1\}, \{Z,A\}, \delta, p, Z,\{\})$, $L=N(M_1)$

$\delta(p,\lambda,Z) = \{(p,\lambda)\}$ … čte prázdné slovo

$\delta(p,0,Z) = \{(p,A)\}$

$\delta(p,0,A) = \{(p,AA)\}$

$\delta(p,1,A) = \{(q,\lambda)\}$

$\delta(q,1,A) = \{(q,\lambda)\}$

$M_2 = (\{p,q,q_2,q_F\}, \{0,1\}, \{Z,A,Z_2\}, \delta_2, q_2, Z_2, \{q_F\})$, $L=L(M_2)$

$\delta_2(q_2,\lambda,Z_2) = \{(p,ZZ_2)\}$ … nastartování výpočtu M_1

$\delta_2(p,\lambda,Z) = \{(p,\lambda)\}$

$\delta_2(p,0,Z) = \{(p,A)\}$

$\delta_2(p,0,A) = \{(p,AA)\}$

$\delta_2(p,1,A) = \{(q,\lambda)\}$

$\delta_2(q,1,A) = \{(q,\lambda)\}$

$\delta_2(p,\lambda,Z_2) = \{(q_F,\lambda)\}$ … ukončení výpočtu

$\delta_2(q,\lambda,Z_2) = \{(q_F,\lambda)\}$ … "

Přijímání stavem ⇒ přijímání zásobníkem

Pro každý zásobníkový automat M_1 existuje ekvivalentní zásobníkový automat M_2 tak, že $L(M_1)=N(M_2)$ (koncový stav → prázdný zásobník).

Důkaz (konstruktivní):

idea:

- na zásobník přidáme speciální symbol (proti vyprázdnění),
- běžíme stejně jako M_1,
- v koncovém stavu smažeme zásobník (nedeterminismus!)

formálně:

$M_1 = (Q_1,X,Y_1,\delta_1,q_1,Z_1,F) \rightarrow M_2 = (Q_2,X,Y_2,\delta_2,q_2,Z_2,\{\})$,

$q_2,q_M \notin Q_1$, $Q_2 = Q_1 \cup \{q_2,q_M\}$,

$Z_2 \notin Y_1$, $Y_2 = Y_1 \cup \{Z_2\}$,

δ_2 „=" δ_1 + $\forall q_F\in F\ \forall Z\in Y_2\ \delta_2(q_F,\lambda,Z)=(\delta_1(q_F,\lambda,Z) \cup \{(q_M,\lambda)\})$,

+ $\delta_2(q_2,\lambda,Z_2)=\{(q_1,Z_1Z_2)\}$ + $\forall Z\in Y_2\ \delta_2(q_M,\lambda,Z)=\{(q_M,\lambda)\}$

$L(M_1)=N(M_2)$?

$w\in L(M_1) \Leftrightarrow (q_1,w,Z_1) \vdash^*_{M1} (q_F,\lambda,v)$

$\Leftrightarrow (q_2,w,Z_2) \vdash_{M2} (q_1,w,Z_1Z_2) \vdash^*_{M2} (q_F,\lambda, v Z_2) \vdash^*_{M2} (q_M,\lambda,\lambda)$

$\Leftrightarrow w\in N(M_2)$

Příklad převodu

$L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^*, |w|_0 = |w|_1 \}$

$M_1 = (\{p,q\}, \{0,1\}, \{Z,N,J\}, \delta, p, Z, \{p\})$, $L=L(M_1)$

- $\delta(p,0,Z) = \{(q,NZ)\}$ … čte první nulu
- $\delta(p,1,Z) = \{(q,JZ)\}$ … čte první jedničku
- $\delta(q,0,N) = \{(q,NN)\}$ … přidává další nulu
- $\delta(q,0,J) = \{(q,\lambda)\}$ … krátí nulu oproti předchozí jedničce
- $\delta(q,1,N) = \{(q,\lambda)\}$ … krátí jedničku oproti předchozí nule
- $\delta(q,1,J) = \{(q,JJ)\}$ … přidává další jedničku
- $\delta(q,\lambda,Z) = \{(p,Z)\}$ … počet nul a jedniček vyrovnán

$M_2 = (\{p,q,q_2,q_M\}, \{0,1\}, \{Z,N,J,Z_2\}, \delta_2, q_2, Z_2, \{\})$, $L=N(M_2)$

- $\delta_2(q_2,\lambda,Z_2) = \{(p,ZZ_2)\}$ … nastartování výpočtu M_1
- " … stejné instrukce jako u M_1
- $\delta_2(p,\lambda,X) = \{(q_M, \lambda)\}$ $\forall X \in \{Z,N,J,Z_2\}$ … přechod do mazacího stavu
- $\delta_2(q_M,\lambda,X) = \{(q_M, \lambda)\}$ $\forall X \in \{Z,N,J,Z_2\}$ … mazání zásobníku

Od gramatiky k automatu

Každý bezkontextový jazyk je rozpoznáván zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem.

Důkaz (konstruktivní):

idea:

- ze vstupu čteme terminály, na zásobníku terminály i neterminály
- pravidla gramatiky → pravidla automatu (opracování zásobníku)
- přidáme pravidla pro krácení terminálu na vstupu a na zásobníku
- stačí jediný stav

formálně:

$G=(V_N,V_T,S,P) \rightarrow M=(\{p\},V_T,V_N \cup V_T,\delta,p,S,\{\})$

$\delta(p,\lambda,X)=\{(p,w) \mid (X \rightarrow w) \in P\}$ $\forall X \in V_N$ … opracování zásobníku

$\delta(p,a,a)=\{(p,\lambda)\}$ $\forall a \in V_T$ … krácení terminálů

Příklad: $A \rightarrow bAc \mid \lambda$ … $\delta(p,\lambda,A) = \{ (p,bAc), (p,\lambda) \}$

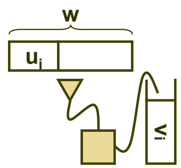
Od gramatiky k automatu - pokračování

$N(M) \subseteq L(G)$?

„Situaci" v kroku *i* popíšeme pomocí slova $w_i=u_iv_i$

u_i - dosud přečtená část vstupního slova

v_i - ještě nezpracovaná část (zásobník)



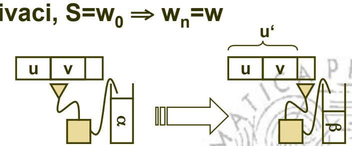
provedení kroku

a) $v_i = Zv_i'$ kde $Z \in V_N$, potom
$u_{i+1} = u_i$ (nic nečteme), $v_{i+1} = vv_i'$ (dle pravidla gramatiky $Z \rightarrow v$)
zřejmě tedy $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ (přímý přepis v gramatice)

b) $v_i = av_i'$ kde $a \in V_T$, potom $u_{i+1} = u_ia$, $v_{i+1} = v_i'$, tedy $w_{i+1} = w_i$

výpočet automatu tedy definuje derivaci, $S=w_0 \Rightarrow w_n=w$

$L(G) \subseteq N(M)$?



vezmeme levé derivace

$u\alpha \Rightarrow^* u'\beta$, kde $u'=uv$, $u,u' \in V_T^*$ potom $(p,v,\alpha) \vdash^* (p,\lambda,\beta)$

dohromady $S \Rightarrow^* w$ a tedy $(p,w,S) \vdash^* (p, \lambda, \lambda)$

Od gramatiky k automatu - příklad

$G=(V_N,V_T,S,P) \rightarrow M=(\{p\},V_T,V_N \cup V_T,\delta,p,S,\{\})$

$\delta(p,\lambda,X)=\{(p,w) \mid (X \rightarrow w) \in P\}$ $\forall X \in V_N$ … opracování zásobníku

$\delta(p,a,a)=\{(p,\lambda)\}$ $\forall a \in V_T$ … krácení terminálů

Příklad: $L= \{a^ib^jc^k \mid i+j=k\}$

Gramatika	*Zásobníkový automat*
$S \rightarrow aSc \mid A$	$\delta(p,\lambda,S) = \{ (p,aSc), (p,A) \}$
$A \rightarrow bAc \mid \lambda$	$\delta(p,\lambda,A) = \{ (p,bAc), (p,\lambda) \}$
	$\delta(p,x,x) = \{ (p,\lambda) \}$ $\forall x \in \{a,b,c\}$

$S \Rightarrow aSc \Rightarrow aAc \Rightarrow abAcc \Rightarrow abbAccc \Rightarrow abbccc$

$(p,abbccc,S) \vdash (p,abbccc,aSc) \vdash (p,bbccc,Sc) \vdash (p,bbccc,Ac)$
$\vdash (p,bbccc,bAcc) \vdash (p,bccc,Acc) \vdash (p,bccc,bAccc)$
$\vdash (p,ccc,Accc) \vdash (p,ccc,ccc) \vdash (p,cc,cc) \vdash (p,c,c) \vdash (p, \lambda, \lambda)$

Od automatu ke gramatice

Pro jednostavový ZA, stačí reverzní proces k BKG→ZA.

Pro více-stavový ZA:

- převést na jednostavový ZA
- přímo na gramatiku

Gramatika

$Z \to 0ZJ$

$Z \to \lambda$

$J \to 1$

Převod více-stavového ZA na gramatiku:

pravidla gramatiky zachycují všechny možné výpočty

neterminální symboly: $[q,Z,p]$, kde $p,q \in Q$, $Z \in Y$

q je stav automatu těsně před tím, než se Z přepíše

p je stav automatu, když začínáme počítat pod Z

pravidla gramatiky:

$S \to [q_0,Z_0,p]$ nastartování výpočtu (p - nevíme, kde skončí)

$[q,A,p] \to a\, [q_1,B_1,q_2]\, [q_2,B_2,q_3] \dots [q_m,B_m,p]$

$\delta(q,a,A) \ni (q_1, B_1 B_2 \dots B_m)$

$q_2,\dots, q_m,p$ libovolné stavy - nevíme, jak výpočet vypadá

speciálně: $[q,A,p] \to a$, pro $\delta(q,a,A) \ni (p,\lambda)$

Výpočet automatu → derivace

$(q,w,A) \vdash^* (p,\lambda,\lambda) \quad \Rightarrow \quad [q,A,p] \Rightarrow^* w$

indukcí dle délky výpočtu

k=1

$w \in X \cup \{\lambda\}$, $\delta(q,w,A) \ni (p,\lambda)$, tj. máme pravidlo $[q,A,p] \to w$

k>1 (pro výpočty kratší než k platí)

$(q,au_1\dots u_l,A) \vdash (q_1, u_1\dots u_l, B_1\dots B_l)$, $l \geq 1$ první krok výpočtu

dle přechodu $\delta(q,a,A) \ni (q_1, B_1 B_2 \dots B_l)$

u_i jsou slova nutná ke zpracování zásobníkového symbolu B_i

tj. $(q_i,u_i,B_i) \vdash^* (q_{i+1},\lambda,\lambda)$, pro vhodná q_i ($q_{l+1}=p$)

tyto výpočty jsou nutně kratší než *k*

tj. dle indukčního předpokladu $[q_i,B_i,q_{i+1}] \Rightarrow^* u_i$

dohromady:

$[q,A,p] \to a\, [q_1,B_1,q_2]\, [q_2,B_2,q_3] \dots [q_l,B_l,p]$

$[q,A,p] \Rightarrow^* a \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_l$

Derivace → výpočet automatu

$[q,A,p] \Rightarrow^* w \quad \Rightarrow \quad (q,w,A) \vdash^* (p,\lambda,\lambda)$

indukcí dle délky (levé) derivace

k=1

jediné pravidlo $[q,A,p] \to w$ muselo vzniknout z $\delta(q,w,A) \ni (p,\lambda)$

k>1 (pro derivace kratší než k platí)

$[q,A,p] \to a\, [q_1,B_1,q_2]\, [q_2,B_2,q_3] \dots [q_l,B_l,p]$ první použité pravidlo

vzniklo z přechodu $\delta(q,a,A) \ni (q_1, B_1 B_2 \dots B_l)$

potom $w = a\, u_1\dots u_l$, kde $[q_i,B_i,q_{i+1}] \Rightarrow^* u_i$ ($q_{l+1}=p$)

tyto derivace jsou nutně kratší než *k*

tj. dle indukčního předpokladu $(q_i,u_i,B_i) \vdash^* (q_{i+1},\lambda,\lambda)$

dohromady: „slepíme“ výpočty a dostaneme

$(q,w,A) \vdash (q_1, u_1\dots u_l, B_1 B_2 \dots B_l) \vdash^* (p,\lambda,\lambda)$

Derivace vždy začíná nějakým pravidlem $S \to [q_0,Z_0,q]$, tj. $L(G)=N(M)$.

Příklad převodu automatu na gramatiku

$\delta(q,x,A) \ni \{(q_1,B^1..B^m)\}$ …….. ${}_qA_p \to x\, [{}_{q_1}B^1{}_{q_2}] \dots [{}_{q_m}B^m{}_p]$

Příklad: $L = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$

Automat	*Gramatika*
	$S \to {}_pZ_p \mid {}_pZ_q$
$\delta(p,\lambda,Z) = \{(p,\lambda)\}$	${}_pZ_p \to \lambda$
$\delta(p,0,Z) = \{(p,A)\}$	$\cancel{{}_pZ_p \to 0\, {}_pA_p}$ ${}_pZ_q \to 0\, {}_pA_q$
$\delta(p,0,A) = \{(p,AA)\}$	$\cancel{{}_pA_p \to 0\, {}_pA_p\, {}_pA_p \mid 0\, {}_pA_q\, {}_qA_p}$ ${}_pA_q \to \cancel{0\, {}_pA_p\, {}_pA_q} \mid 0\, {}_pA_q\, {}_qA_q$
$\delta(p,1,A) = \{(q,\lambda)\}$	${}_pA_q \to 1$
$\delta(q,1,A) = \{(q,\lambda)\}$	${}_qA_q \to 1$

$S \Rightarrow {}_pZ_q \Rightarrow 0\, {}_pA_q \Rightarrow 00\, {}_pA_q\, {}_qA_q \Rightarrow 001\, {}_qA_q \Rightarrow 0011$