Zkouška VPL - písemná část

1. února 2017

1. Jsou dány dva výroky nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$:

$$\begin{aligned} \varphi:&\quad (\neg p \lor q) \land (p \lor r) \land (\neg q \lor \neg s) \land \neg q, \\ \psi:&\quad (p \lor t) \land (\neg q \lor \neg r). \end{aligned}$$

   (a) Pomocí implikačního grafu rozhodněte, zda je výrok $\varphi \land \psi$ splnitelný. *(2b)*

   (b) Tablo metodou určete množinu $M^{\mathbb{P}'}(\varphi)$ všech modelů φ nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$. *(3b)*

   (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}'$ nezávislých v $\{\varphi\}$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Je teorie $\{\varphi, \psi\}$ nad $\mathbb{P}$ konzervativní extenzí teorie $\{\varphi\}$ nad $\mathbb{P}'$? *(2b)*

2. Jsou dána následující tvrzení:

   (i) Každý má nějakého nepřítele.

   (ii) Nepřítel nepřítele je přítel.

   (iii) Svému příteli je každý přítelem.

   Ukažte rezolucí, že pak:

   (iv) Česko má přítele, jehož (nějaký) nepřítel má za přítele nějakého nepřítele Česka.

   Konkrétně:

   (a) Uvedená tvrzení vyjádřete <u>sentencemi</u> φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 jazyka $L = \langle N, P, c\rangle$ bez rovnosti, kde N, P jsou binární relační symboly, $N(x, y)$ resp. $P(x, y)$ značí, že "x má za nepřítele resp. přítele y", a c je konstantní symbol označující Česko. *(2b)*

   (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \models \varphi_4$. *(2b)*

   (c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci. *(1b)*

   (d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *(4b)*

   (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T', která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (d). (2b)*

3. Nechť T je teorie jazyka $L = \langle f, g, a\rangle$ s rovností, kde f, g, a jsou (po řadě) binární, unární a nulární funkční symboly, s následujícími axiomy

$$\begin{aligned} f(x, f(y, z)) &= f(f(x, y), z), \\ f(a, x) = x \quad &\land \quad f(x, a) = x, \\ f(x, g(x)) = a \quad &\land \quad f(g(x), x) = a. \end{aligned}$$

   (a) Je sentence $(\forall x)(\forall y) f(x, y) = f(y, x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (b) Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle\{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0\rangle$, kde $+$, $-$ jsou standardní sčítání a (unární) mínus modulo 4. Je teorie $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Z}_4})$ jednoduchá extenze teorie T? Je $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Z}_4})$ kompletní? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (c) Nalezněte všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}$. Jsou všechny modelem teorie T? Zdůvodněte. *(2b)*

   (d) Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi. Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*