Kvantová logika podle Neumanna - problém nekonečné dimenze

Svatopluk Krýsl

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Filozofické problémy informatiky
27. říjen 2015

Základní aspekty kvantové fyziky

1. Dualita částice x vlna (deBroglie), 1925
2. Současná nezměřitelnost některých pozorovatelných (W. Heisenberg), 1927
3. Diskrétní hodnoty některých pozorovatelných (Bohr, Sommerfeld, Pauli, Dirac a další, 1913 - 1928) - energie vázaného elektronu, potenciálové jámy
4. Kodaňská interpretace: vztah teorie k experimentu (princip koroborace), 1925-1927

Princip neurčitosti

- p - hybnost
- q - poloha
- Δp, Δq - chyby v měření p a q
- Heisenbergův princip: $\Delta p \Delta q > \frac{h}{2\pi}$ (volná částice)
- impulzmoment a poloha, impulzmoment a hybnost (vodík)
- Vede k matematické formulaci kvantové mechaniky

Logické problémy - princip neurčitosti

- $a =$ přístroj A naměřil $p = 1 \pm 1/3$
- $b =$ přístroj B naměřil $q = 0 \pm 1$
- $c =$ přístroj C naměřil $q = 2 \pm 1$
- $a \cap (b \cup c) = (p = 1 \pm 1/3) \cap (q = 1 \pm 2)$, $\Delta p \Delta q = 2/3 > 1/2$
- $(a \cap b) \cup (a \cap c) = [(p = 1 \pm 1/3) \cap (q = 0 \pm 1)] \cup [(p = 1 \pm 1/3) \cup (q = 2 \pm 1)], \Delta q \Delta p = 1 \cdot \frac{1}{3} < 1/2$ "a priori" nemožné (Heisenberg)
- Neplatí distributivita

Vlnové balíky - variace na Schrödingerovu kočku

Zpřesnění příkladu z [von Neumann, Birkhoff, Annals Math., s. 831]. Nechť π je rovina v $\mathbb{R}^3$ - klasickém Euklidově prostoru
Částice je vlnový balík
0 - nenaměřím nic - částice pro stroje neexistuje 1 - vše je možné - částice pro stroje existuje

- $a = A$ měří částici vlevo od π
- $b = B$ měří částici vpravo od π
- $c = C$ měří částici přesně uprostřed π
- Předpoklad(!): $a \cup b = a \cup a' = 1$. Toto nepřímo vysvětluje von Neumann a Birkhoff úvahami o míře na klasickém (nekvantovém) prostoru
- $(a \cup b) \cap c = (a \cup a') \cap c = 1 \neq 0 = (a \cap c) = (b \cap c) = (a \cap c) \cup (b \cap c)$
- Opět neplatí distributivnost

Distributivnost

Pro konjunkci a disjunkci klasického výrokového počtu distributivnost platí

- $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
- $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

Pro sčítání a násobení v okruzích (například $\mathbb{Z}$) platí

- $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$
- $(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$

Posety a svazy

Poset = částečně uspořádaná množina $(X, \leq)$

- A množina a její množina podmnožin s inkluzí, $\leq = \subseteq$
- $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, v B jsou neporovnatelné prvky - "stále" poset
- (slabé) uspořádání $\leq$: tranzitivní, antisymetrická a reflexivní relace na množině
- $x \leq x$; $x \leq y$ a $y \leq x$ implikuje $x = y$; $x \leq y$ a $y \leq z$ implikuje $x \leq z$
- Dělitelnost 12

Posety a svazy

X částečně uspořádaná množina, $S \subseteq X$

- Horní závora $u \geq s$, $\forall s \in S$, supremum $u' \geq s \implies u \leq u'$
- Dolní závora $u \leq s$, $\forall s \in S$, infimum - analogicky
- Svaz (Verband, lattice) = Poset, kde všechny dvouprvkové množiny mají infimum a supremum (meet a join)
- Join a meet jsou jednoznačné $j = a \cap b$ a $m = a \cup b$
- $j \neq j' : j \geq a, b,\ j' \geq a, b,\ j \leq j',\ j' \leq j$ implikuje (antisymetrie) $j = j'$

Příklady

- Množiny s inkluzí - $\cup$ je sjednocení a $\cap$ je průnik množin
- Linearní podprostory v prostoru konečné dimenze - $\cup$ definujeme jako lineární obal sjednocení a $\cap$ jako průnik
- V $\mathbb{Q}$ nemají některé podmnožiny join či meet - jiný problém (nám jde o dvouprvkové)
- "čtvernožka" není svaz, "šestinožka" není
- Dělitelnost je svaz (nsn, nsd)

Distributivni svazy

Zopakujme: Distributivnost platí v klasické logice a neměla by v logice kvantové

Distributivní svazy = Svazy, kde platí $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

- Dělitelnost je distributivní
- Sjednocení a průnik množin je
- Podprostory v $\mathbb{R}^3$ nejsou
- M_3 není

Modulární svazy

Modulární svaz = svaz splňující
$(a \cap b) \cup (a \cap c) = [(a \cap b) \cup c] \cap a$
(nebo $a \leq c$ implikuje $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$)

- Podprostory jsou modulární
- Každý distributivní je modulární
- N_5 Dedekindův svaz není modulární
- N_5 tedy není distributivní
- Podprostory konečných jsou modulární

Neumann-Birkhoffovy axiomy kvantové logiky

Axiomy:

- L1 $a \cap a = a$ a zároveň $a \cup a = a$
- L2 $a \cup b = b \cup a$ a $a \cup b = b \cup a$
- L3 $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ a $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$
- L4 $a \cup (a \cup b) = a \cap (a \cap b) = a$

Další elementy: $0, 1$ a unární relace $'$

- L7.1 $a'' = a$
- L7.2 $a \cap a' = 1$ a $a \cup a' = 0$
- L7.3 $a \leq b$ implikuje $a' \geq b'$
- L5 $(a \cap b) \cup (a \cap c) = [(a \cap b) \cup c] \cap a$

(L5 jinak: $a \leq c$ implikuje $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$)

Ortomodularita

Svaz nazveme modulární, pokud

M1 Existuje $0, 1 \in X$, že $0 \leq x$ a $1 \geq x$ $\forall x \in X$

M2 $' : X \to X$, že $a' \cap a = 0$ a $a \cup a' = 1$

M3 $a'' = a$, $a \leq b$ implikuje $b' \leq a'$,

M4 $(a \cap b) \cup (a \cap c) = [(a \cap b) \cup c] \cap a$

Birkhoffův a Neumannův model kvantové logiky tvoří modulární svaz.

Svaz nazveme ortomodulární, pokud (M1)-(M3) a $a \subseteq c$ implikuje $a \cup (a' \cap c) = c$ (M5).

Ad (M5) - Vyžadujeme tedy modularitu (M4) pro speciální případ $b = a'$, tj. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c = (a \cup a') \cap c = c$. Viz ekvivalentní formulaci modularity.

Příklady

Příklady:

- Podprostory jsou ortomodulární
- Výroková logika je ortomodulární a distributivní
- Kvantová logika - “chceme, aby byla modulární” a splňovala L71-L73 (není distributivní)

von Neumannův a Birkhoffův model

"O čem smíme mluvit?"
O čem nelze mluvit, o tom je třeba mlčet.
Nechť H je Hilbertův prostor nekonečné dimenze

- Konečne podprostory tvoří svaz vzhledem k meet jako průniku a join jako linearní obal sjednocení
- Nekonečné poprostory: aby byl svaz, musíme dělat uzávěry. $L(A \cup B)$ nemusí být uzavřený.
- $X = \ell^2(\mathbb{R})$, $A = \{(a_n)_n \in X |\, a_{2n} = 0\}$, $B = \{(b_n)_n \in X |\, b_{2n+1} = nb_{2n}\}$. $A + B = L(A \cup B)$ není uzavřený (vpravo sjednocení)
- $A \cup B := \overline{L(A \cup B)}(= \overline{A \oplus B})$
  $A \cap B = A$ proniknuto s B
  Pak již podprostory Hilbertových prostorů svaz tvoří

Hilbertovy prostory a modularita

- Nekonečné nejsou modulární
  Příklad - A, B, C [Neumann, Birkhoff, Annals. Math.]
- Učenec: "Nelze mluvit o všem!" Speciálně ne nekonečně rozměrných uzavřených podprostorech v $L^2(\mathbb{R})$ jako o množině výroku pro logiku, a to ani pro modulární logiku.
- Nekonečné separabilní $\ell^2(\mathbb{R}), \ell^2(\mathbb{C}), \ell^2(\mathbb{H})$ jsou však ortomodulární

Projektivní hermitovská geometrie

Jde o čtveřici $(P, N, ', H)$
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ dimenze n.

- body - P : jednorozměrné podprostory ve V
- nadroviny - N : $n-1$ rozměrné podprostory ve V
  Jde o množiny bodů $(x_1, \ldots, x_n)$ splňující $\beta_1 x_1 + \ldots \beta_n x_n = 0$
  $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ určen až na násobek
- Incidence: $x = \langle (x_1, \ldots, x_n) \rangle$ leží v $\langle \beta \rangle$, tehdy a jen tehdy $\sum_i^n \beta_i x_i = 0$
- $'$ je involutivní antiautomorfizmus
- $H : V \times V \to \mathbb{F}$ hermitovská forma

Objasnění některých pojmů

Věta (von Neumann, Birkhoff): Hermitovský projektivní prostor nad $\mathbb{F}$ s involucí tvoří kvantovou logiku. Pokud je kvantová logika "iredecubilní" a její řetězce jsou shora omezené, pak je realizována projektivním hermitovským prostorem nad $\mathbb{F}$ s involucí.

Těleso $\mathbb{F}$ má antiinvoluci $\gamma \mapsto \overline{\gamma}$ - nemusí být komutativní (skew-field, Schiefkörper, např. kvaterniony - $\mathbb{H}$)
Hermitovská forma = forma tvaru
$(\xi, x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\xi_i} \gamma_i x_i$, $\gamma_i \in \mathbb{F}$ reálné ($\overline{\gamma}_i = \gamma_i$)
Involutorní antiautomorfizmus: obrací incidenci a $a'' = a$.

- Engesser, K., Gabbay, D., Lehmann, D., Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures, Quantum Logic, Elsevier, 2008.
- Birkhoff, G., von Neumann, J., Annals Math., Vol. 37, 1936.
- Putnam,H., Is Logic Empirical?, Boston Studies in the Philosophy of Science Vol. V, 1969.
- Text profesora Zieglera, TU-Darmstadt, `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~ziegler/qlogic.html`
- Chiara, M., Giuntini, R., Quantum Logic, 2008, http://arxiv.org/abs/quant-ph/0101028v2