Pravděpodobnost nejen kvantová

Mirko Navara

Centum strojového vnímání
katedra kybernetiky
Elektrotechnická fakulta ČVUT v Praze
http://cmp.felk.cvut.cz/˜navara

Jak nevyšly volební předpovědi v ČR 2013

http://zpravy.idnes.cz/jak-se-trefily-pruzkumy-0wa-/domaci.aspx?c=A131027_120534_domaci_jw

	Volby	Factum	Median	STEM	CVVM	Sanep	Médea	Aisa
Rozsah		1000	1000	1000	1000	7000	1000	1000
ČSSD	**20.5**	**22.8**	25.5	25.9	26	23.8	**22.2**	**23**
ANO	**18.7**	12.1	13	16.1	**16.5**	11.6	**16.9**	16
KSČM	**14.9**	**17.1**	**16**	**13.3**	18	16.9	11.8	**14**
TOP 09	**12**	**13.2**	**13**	**11.5**	9	**11.9**	9.6	**10.5**
ODS	**7.7**	**7.2**	**8**	**8.6**	**6.5**	**7.5**	5.5	**7**
Úsvit	**6.9**	3.7	4	**5.9**	5	5.3	**8.2**	**6**
KDU	**6.8**	**5.9**	**6**	4.5	5	5.7	**6.2**	**6**
SZ	**3.2**	**4.3**	**3**	**2.6**	2	**3.1**	**2.9**	**3**
SPOZ	**1.5**	4.7	5	2.6	3.5	5.2	3.7	4
ostatní	**7.8**	**9**	**6.5**	**9**	**8.5**	**9**	13	10.5
Účast	**59.5**	54	**60**	67	63	**59.3**	71	78
χ^2-test		≈ 0	≈ 0	$5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-12}$	≈ 0	≈ 0	$3 \cdot 10^{-10}$

Tučně jsou vyznačeny předpovědi, které se vejdou do 95% symetrického intervalového odhadu. **χ^2-test dobré shody** ukazuje, že u nejúspěšnější agentury lze hypotézu o shodě rozdělení zamítnout na hladině významnosti $5 \cdot 10^{-6}$, tj. takový výsledek bychom při shodě rozdělení dostali s pravděpodobností $1/200\,000$, u ostatních agentur ještě menší.

σ-algebra množin, $\mathcal{L} \subseteq 2^U$:

- $U \in \mathcal{L}$
- $A \in \mathcal{L} \Longrightarrow U \setminus A \in \mathcal{L}$
- $\{A_i \mid \ i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L} \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{L}$

Stav (=**pravděpodobnostní míra**) $s \colon \mathcal{L} \to [0,1]$:

- $s(U) = 1$
- $\{A_i \mid \ i \in \mathbb{I}\} \subseteq \mathcal{L}, \ A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Longrightarrow s\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{I}} s(A_i)$

konečně, resp. **spočetně** aditivní pro $\mathbb{I}$ konečnou, resp. spočetnou

Klasický prostor jevů

σ-algebra množin, $\mathcal{L} \subseteq 2^U$:

- $U \in \mathcal{L}$
- $A \in \mathcal{L} \Longrightarrow U \setminus A \in \mathcal{L}$
- $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L} \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{L}$

Stav (=**pravděpodobnostní míra**) $s\colon \mathcal{L} \to [0,1]$:

- $s(U) = 1$
- $\{A_i \mid i \in \mathbb{I}\} \subseteq \mathcal{L},\ A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Longrightarrow s\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\Big) = \sum_{i \in \mathbb{I}} s(A_i)$

konečně, resp. **spočetně** aditivní pro $\mathbb{I}$ konečnou, resp. spočetnou

Stavový prostor (**konečně** aditivních stavů): $\mathcal{S}(\mathcal{L}) \subseteq [0,1]^{\mathcal{L}}$ kompaktní, konvexní, Choquetův simplex

Klasický prostor jevů

σ-algebra množin, $\mathcal{L} \subseteq 2^U$:

- $U \in \mathcal{L}$
- $A \in \mathcal{L} \Longrightarrow U \setminus A \in \mathcal{L}$
- $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L} \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{L}$

Stav (=**pravděpodobnostní míra**) $s \colon \mathcal{L} \to [0,1]$:

- $s(U) = 1$
- $\{A_i \mid i \in \mathbb{I}\} \subseteq \mathcal{L},\ A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Longrightarrow s\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{I}} s(A_i)$

konečně, resp. **spočetně** aditivní pro $\mathbb{I}$ konečnou, resp. spočetnou

Stavový prostor (**konečně** aditivních stavů): $\mathcal{S}(\mathcal{L}) \subseteq [0,1]^{\mathcal{L}}$ kompaktní, konvexní, Choquetův simplex

Čisté stavy: extremální body $\mathcal{S}(\mathcal{L})$
Dvouhodnotové stavy: $\mathcal{S}(\mathcal{L}) \cap \{0,1\}^{\mathcal{L}}$ = body Stoneova prostoru

m p
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

σ-algebra množin, $\mathcal{L} \subseteq 2^U$:
- $U \in \mathcal{L}$
- $A \in \mathcal{L} \Longrightarrow U \setminus A \in \mathcal{L}$
- $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L} \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{L}$

Stav (=**pravděpodobnostní míra**) $s\colon \mathcal{L} \to [0,1]$:
- $s(U) = 1$
- $\{A_i \mid i \in \mathbb{I}\} \subseteq \mathcal{L},\ A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Longrightarrow s\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\Big) = \sum_{i \in \mathbb{I}} s(A_i)$

konečně, resp. **spočetně** aditivní pro $\mathbb{I}$ konečnou, resp. spočetnou

Stavový prostor (**konečně** aditivních stavů): $\mathcal{S}(\mathcal{L}) \subseteq [0,1]^{\mathcal{L}}$ kompaktní, konvexní, Choquetův simplex

Čisté stavy: extremální body $\mathcal{S}(\mathcal{L})$
Dvouhodnotové stavy: $\mathcal{S}(\mathcal{L}) \cap \{0,1\}^{\mathcal{L}} =$ body Stoneova prostoru

Zde: dvouhodnotové = čisté

σ-algebra množin, $\mathcal{L} \subseteq 2^U$:

- $U \in \mathcal{L}$
- $A \in \mathcal{L} \Longrightarrow U \setminus A \in \mathcal{L}$
- $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L} \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{L}$

Stav (=**pravděpodobnostní míra**) $s\colon \mathcal{L} \to [0,1]$:

- $s(U) = 1$
- $\{A_i \mid i \in \mathbb{I}\} \subseteq \mathcal{L},\ A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Longrightarrow s\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{I}} s(A_i)$

konečně, resp. **spočetně** aditivní pro $\mathbb{I}$ konečnou, resp. spočetnou

Stavový prostor (**konečně** aditivních stavů): $\mathcal{S}(\mathcal{L}) \subseteq [0,1]^{\mathcal{L}}$ kompaktní, konvexní, Choquetův simplex

Čisté stavy: extremální body $\mathcal{S}(\mathcal{L})$
Dvouhodnotové stavy: $\mathcal{S}(\mathcal{L}) \cap \{0,1\}^{\mathcal{L}}$ = body Stoneova prostoru

Zde: dvouhodnotové = čisté

Potřebujeme jen **disjunktní** sjednocení $\Rightarrow$ **σ-třída** množin, $\mathcal{L} \subseteq 2^U$:

- $U \in \mathcal{L}$
- $A \in \mathcal{L} \Longrightarrow U \setminus A \in \mathcal{L}$
- $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L},\ A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{L}$

Příklad 1 (průhledné bariéry)

$V/P =$ Výhry/Prohry s|bez hráče JJ

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline V|V & P|V \\ \hline V|P & P|P \\ \hline \end{array}}_{a} \left.\vphantom{\begin{array}{c} V \end{array}}\right\} b \quad \times \mathbf{B}$$

$$\times \; \mathbf{A}$$

$U = \{V|V, V|P, P|V, P|P\}$

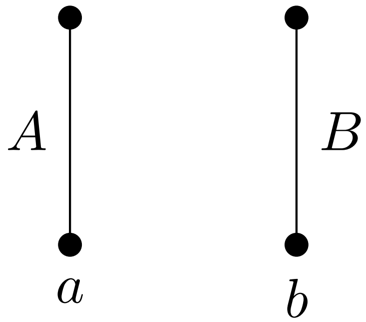
$A = \{\emptyset, \underbrace{\{V|V, V|P\}}_{a}, \underbrace{\{P|V, P|P\}}_{a'}, U\}$

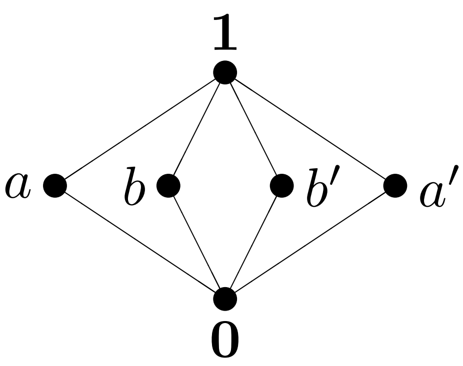
$B = \{\emptyset, \underbrace{\{V|V, P|V\}}_{b}, \underbrace{\{V|P, P|P\}}_{b'}, U\}$

$\mathcal{P} = A \cup B = \{\emptyset, a, a', b, b', U\}$

$\mathcal{L}$ je (nedistributivní modulární) svaz zvaný $MO2$

Příklad 1 (průhledné bariéry)



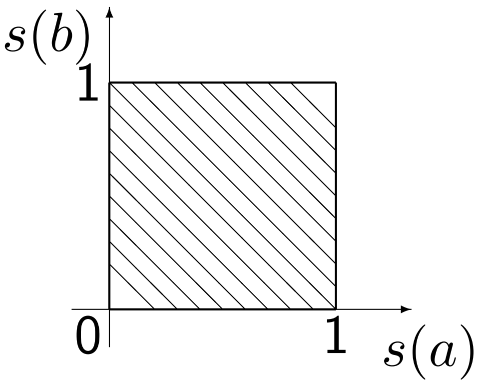


Čisté stavy:
$s : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$

$s(a)$	$s(b)$
0	0
0	1
1	0
1	1

(S0) $\quad s(U) = 1$
(S1) $\quad s(x') = 1 - s(x)$

Všechny stavy:
$s : \mathcal{L} \to [0, 1]$, splňují (S0), (S1)
$s(a) = p,\ \ s(b) = q,\ \ p, q \in [0, 1]$ libovolná



Příklad 2 (průhledné bariéry)

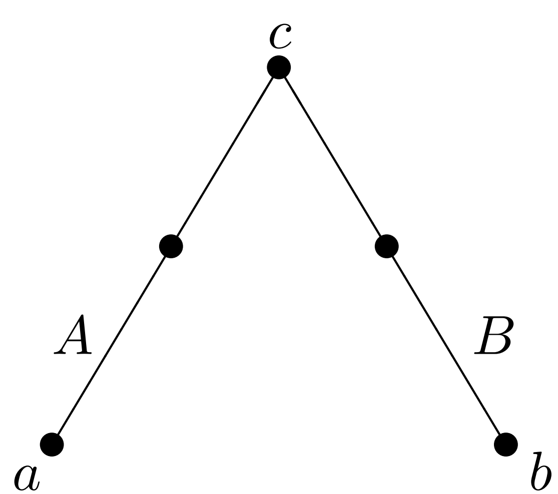
Příklad 1 s dalším výsledkem $c =$ zápas zkontumován

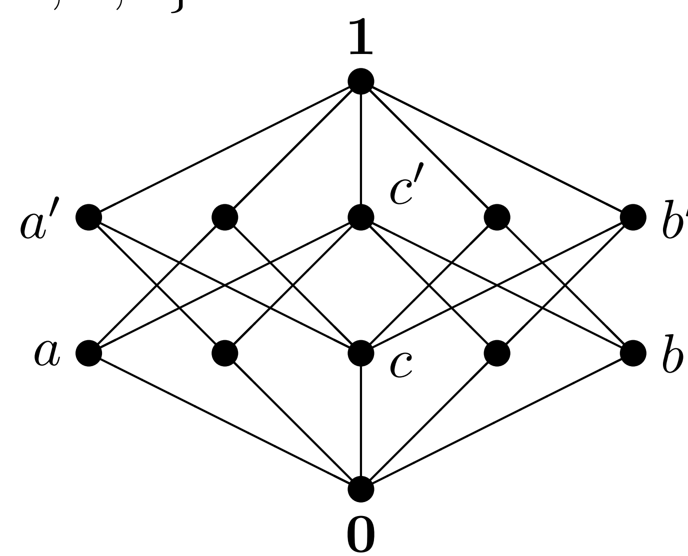
$A = \{\mathbf{0}, a, c, (a \vee c)', a \vee c, a', c', \mathbf{1}\}$

$B = \{\mathbf{0}, b, c, (b \vee c)', b \vee c, b', c', \mathbf{1}\}$

$A \cap B = \{\mathbf{0}, c, c', \mathbf{1}\}$

$\mathcal{L} = A \cup B = \{\mathbf{0}, a, b, c, a \vee c, b \vee c, (a \vee c)', (b \vee c)', a', b', c', \mathbf{1}\}$



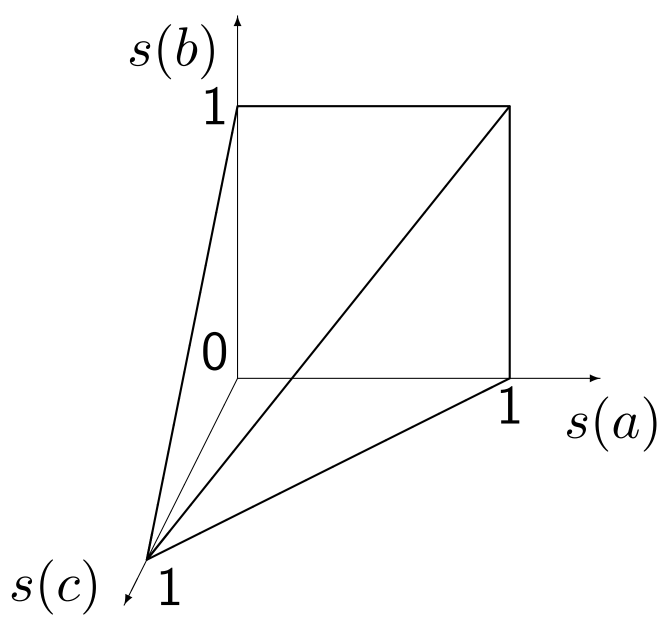


Příklad 2 (průhledné bariéry)

Čisté stavy:

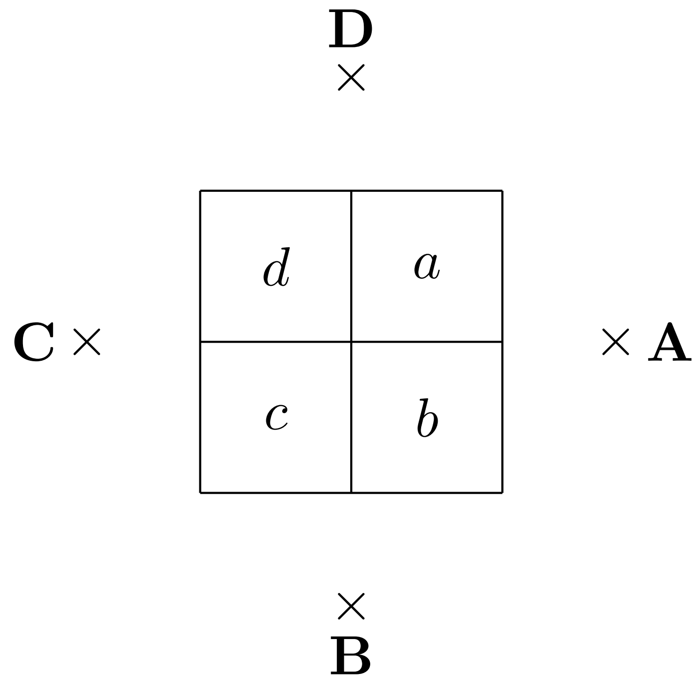
$s(a)$	$s(b)$	$s(c)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0
0	0	1

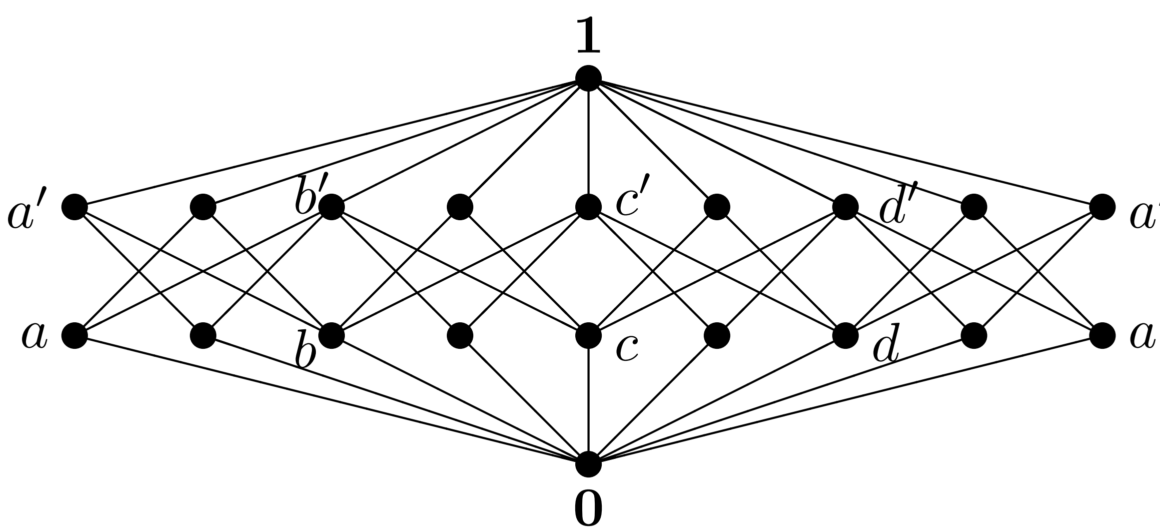
Všechny stavy:
$s(a) = p,\ s(b) = q,\ s(c) = r,\ \ r \in [0,1]$ libovolné, $p, q \in [0, 1-r]$

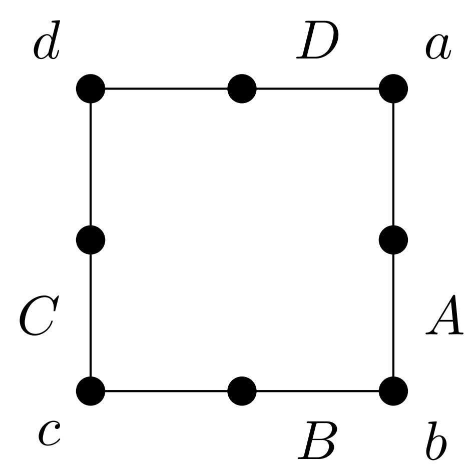


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Příklad 3 (neprůhledné bariéry)







Příklad 3 (neprůhledné bariéry)

Čisté stavy:

$s(a)$	$s(b)$	$s(c)$	$s(d)$
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

Definice: **Ortomodulární poset** (**OMP**) je poset s mezemi $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ a unární operací $' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (**ortocomplementace**) takovou, že pro všechna $a, b \in \mathcal{L}$,

- $a'' = a$
- $a \leq b \Longrightarrow b' \leq a'$
- $a \wedge a' = \mathbf{0}$
- $a \leq b \Longrightarrow b = a \vee (a' \wedge b)$ (**ortomodulární zákon**, existence pravé strany se předpokládá)

Je-li navíc svaz, je to **ortomodulární svaz** (**OML**).

Definice: **Ortomodulární poset** (**OMP**) je poset s mezemi $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ a unární operací $' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (**ortocomplementace**) takovou, že pro všechna $a, b \in \mathcal{L}$,

- $a'' = a$
- $a \leq b \Longrightarrow b' \leq a'$
- $a \wedge a' = \mathbf{0}$
- $a \leq b \Longrightarrow b = a \vee (a' \wedge b)$ (**ortomodulární zákon**, existence pravé strany se předpokládá)

Je-li navíc svaz, je to **ortomodulární svaz** (**OML**).

Ortogonalita: $a \perp b \iff a \leq b'$
(Tato podmínka je silnější než obvyklé $a \wedge b = \mathbf{0}$.)

Obvykle navíc předpokládáme uzavřenost na **spočetná** suprema posloupností **po dvou ortogonálních** prvků.

Definice: **Ortomodulární poset** (**OMP**) je poset s mezemi $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ a unární operací $' : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (**ortocomplementace**) takovou, že pro všechna $a, b \in \mathcal{L}$,

- $a'' = a$
- $a \leq b \implies b' \leq a'$
- $a \wedge a' = \mathbf{0}$
- $a \leq b \implies b = a \vee (a' \wedge b)$ (**ortomodulární zákon**, existence pravé strany se předpokládá)

Je-li navíc svaz, je to **ortomodulární svaz** (**OML**).

Ortogonalita: $a \perp b \iff a \leq b'$
(Tato podmínka je silnější než obvyklé $a \wedge b = \mathbf{0}$.)

Obvykle navíc předpokládáme uzavřenost na **spočetná** suprema posloupností **po dvou ortogonálních** prvků.

Příklad: σ-třída podmnožin je ortomodulární poset.

Stav: $s\colon \mathcal{L} \to [0,1]$ takový, že

- $s(\mathbf{1}) = 1$
- $\{a_i \mid i \in \mathbb{I}\} \subseteq \mathcal{L},\ a_i \perp a_j$ pro $i \neq j \Longrightarrow s\Big(\bigvee_{i\in\mathbb{I}} a_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{I}} s(a_i)$

konečně, resp. **spočetně** aditivní pro $\mathbb{I}$ konečnou, resp. spočetnou

Stav: $s\colon \mathcal{L} \to [0,1]$ takový, že

- $s(\mathbf{1}) = 1$
- $\{a_i \mid i \in \mathbb{I}\} \subseteq \mathcal{L},\ a_i \perp a_j$ pro $i \neq j \Longrightarrow s\Big(\bigvee_{i\in\mathbb{I}} a_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{I}} s(a_i)$

konečně, resp. **spočetně** aditivní pro $\mathbb{I}$ konečnou, resp. spočetnou

dvouhodnotové $\Rightarrow$ čisté,
ale nikoli naopak

Booleova podalgebra: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ taková, že

- $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathcal{M}$,
- $a \in \mathcal{M} \Longrightarrow a' \in \mathcal{M}$,
- $(\mathcal{M},\ \leq\restriction_{\mathcal{M}},\ {}'\restriction_{\mathcal{M}})$ je Booleova algebra.

Booleova podalgebra: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ taková, že

- $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathcal{M}$,
- $a \in \mathcal{M} \Longrightarrow a' \in \mathcal{M}$,
- $(\mathcal{M},\ \leq\restriction_{\mathcal{M}},\ {}'\restriction_{\mathcal{M}})$ je Booleova algebra.

Věta: Každý OMP je sjednocením maximálních Booleových podalgeber.

Booleova podalgebra: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ taková, že

- $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathcal{M}$,
- $a \in \mathcal{M} \Longrightarrow a' \in \mathcal{M}$,
- $(\mathcal{M}, \ \leq\restriction_{\mathcal{M}}, \ {}'\restriction_{\mathcal{M}})$ je Booleova algebra.

Věta: Každý OMP je sjednocením maximálních Booleových podalgeber.

Kompatibilita: $a \leftrightarrow b \iff \exists$ Booleova podalgebra $\mathcal{M}$: $a, b \in \mathcal{M}$

Atom: $a \in \mathcal{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ takový, že neexistuje b splňující $\mathbf{0} < b < a$
$\mathcal{A}(\mathcal{L}) :=$ množina všech atomů $\mathcal{L}$

Tvrzení: Prostor všech konečně aditivních stavů je konvexní kompakt (v součinové topologii).

Věta: [Shultz 74, MN 92] **Každá** kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního topologického lineárního prostoru je afinně homeomorfní s prostorem konečně aditivních (jakož i všech) stavů nějakého OML.

Tvrzení: Prostor všech konečně aditivních stavů je konvexní kompakt (v součinové topologii).

Věta: [Shultz 74, MN 92] **Každá** kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního topologického lineárního prostoru je afinně homeomorfní s prostorem konečně aditivních (jakož i všech) stavů nějakého OML.

Speciálně, stavový prostor může být prázdný.

Charakterizace stavových prostorů – konečně aditivní případ

Tvrzení: Prostor všech konečně aditivních stavů je konvexní kompakt (v součinové topologii).

Věta: [Shultz 74, MN 92] **Každá** kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního topologického lineárního prostoru je afinně homeomorfní s prostorem konečně aditivních (jakož i všech) stavů nějakého OML.

Speciálně, stavový prostor může být prázdný.

To je matematická kuriozita, fyzikální interpretace vyžaduje "dostatek" stavů:

Definice: OMP L je **bohatý** $\iff \forall a, b \in L, a \not\perp b$ $\exists$stav $s : s(a) = s(b) = 1$.

Věta: Všechny ortomodulární svazy tvoří varietu a všechny **bohaté** ortomodulární svazy tvoří její podvarietu.

Problém [Gudder 66]: Jsou všechny omezené pozorovatelné (=kvantové náhodné veličiny) jednoznačně určeny svými středními hodnotami ve všech spočetně aditivních stavech?
(Předpokládáme bohatý OML; jinak by problém byl triviální.)

Problém [Gudder 66]: Jsou všechny omezené pozorovatelné (=kvantové náhodné veličiny) jednoznačně určeny svými středními hodnotami ve všech spočetně aditivních stavech?
(Předpokládáme bohatý OML; jinak by problém byl triviální.)

Motivace: Měřit můžeme jen střední hodnoty.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Problém [Gudder 66]: Jsou všechny omezené pozorovatelné (=kvantové náhodné veličiny) jednoznačně určeny svými středními hodnotami ve všech spočetně aditivních stavech?
(Předpokládáme bohatý OML; jinak by problém byl triviální.)

Motivace: Měřit můžeme jen střední hodnoty.

Odpověď [MN 95]: Ne!

$s(a) + s(b) - s(a \wedge b) \leq 1$

$0 \geq s(a \wedge b) + s(b \wedge c) + s(c \wedge d) - s(a \wedge d) - s(b) - s(c)$

$s(a) + s(b) + s(c) - s(a \wedge b) - s(a \wedge c) - s(b \wedge c) \leq 1$

$s(a \wedge b) + s(b \wedge c) + s(c \wedge d) - s(a \wedge d) - s(b) - s(c) \geq -1$

První požadavek je **valuace**:

$s(a \wedge b) + s(a \vee b) = s(a) + s(b)$

Bohatý OML, který není Booleova algebra, porušuje všechny Bellovy nerovnosti.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

H ... separabilní Hilbertův prostor (reálný nebo komplexní)
$L(H)$ ... množina všech uzavřených podprostorů H (ekvivalentně, všech projektorů v H)

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \{0\}, \\
\mathbf{1} &= H, \\
A \leq B &\iff A \subseteq B, \\
A \wedge B &= A \cap B, \\
A' &= \{x \in H \mid \forall y \in A : y \perp x\}, \\
A \vee B &= \mathit{Lin}(A \cup B),
\end{aligned}$$

kde *Lin* uzávěr lineárního obalu

Pro projektory je kompatibilita ekvivalentní komutativitě, $PQ = QP$, proto též "*nekomutativní teorie míry*"

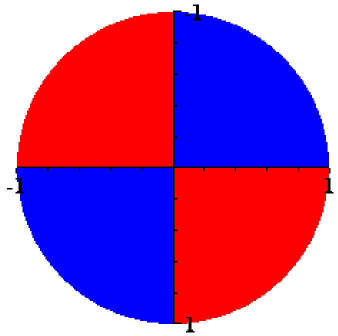
Problém [Birkhoff, von Neumann, Mackey]: Najděte (dobře motivované, ověřitelné) vlastnosti chrakterizující hilbertovské svazy mezi OML.

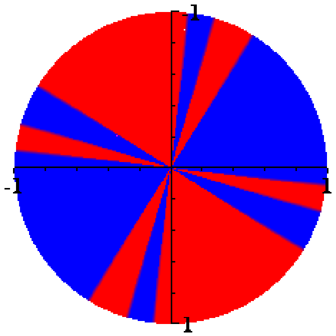
Dílčí výsledky: [Pulmannová], [Bunce, J.D.M. Wright] ...

Stavy na hilbertovském svazu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

Jediná omezení stavů pro $\dim P = 1$: $\quad s(P') = 1 - s(P)$

Dovoluje mnoho dvouhodnotových stavů = obarvení nenulových vektorů dvěma barvami (modrá, červená) tak, že každá ortogonální báze obsahuje právě jeden červený vektor





m p
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

1. Pro $q \in H$, $||q|| = 1$, definujeme **vektorový stav**

$$s_q(\mathit{Lin}(\{y_1, \ldots, y_n\})) = \sum_{i=1}^{n} (q \cdot y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \sphericalangle(q, y_i)$$

pro každou ortonormální bázi $(y_1, \ldots, y_n)$ prostoru H

1. Pro $q \in H$, $||q|| = 1$, definujeme **vektorový stav**

$$s_q(\mathit{Lin}(\{y_1, \ldots, y_n\})) = \sum_{i=1}^{n} (q \cdot y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \sphericalangle(q, y_i)$$

pro každou ortonormální bázi $(y_1, \ldots, y_n)$ prostoru H

Důsledek: $s_q(q) = 1$

1. Pro $q \in H$, $||q|| = 1$, definujeme **vektorový stav**

$$s_q(\mathit{Lin}(\{y_1, \dots, y_n\})) = \sum_{i=1}^{n} (q \cdot y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \sphericalangle(q, y_i)$$

pro každou ortonormální bázi $(y_1, \dots, y_n)$ prostoru H

Důsledek: $s_q(q) = 1$

2. **Směs** vektorových stavů $\quad s(P) = \sum_i c_i s_{q_i}(P)$, kde $c_i > 0$, $\sum_i c_i = 1$.

1. Pro $q \in H$, $||q|| = 1$, definujeme **vektorový stav**

$$s_q(\mathit{Lin}(\{y_1, \ldots, y_n\})) = \sum_{i=1}^{n} (q \cdot y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \sphericalangle(q, y_i)$$

pro každou ortonormální bázi $(y_1, \ldots, y_n)$ prostoru H

Důsledek: $s_q(q) = 1$

2. **Směs** vektorových stavů $s(P) = \sum_i c_i s_{q_i}(P)$, kde $c_i > 0$, $\sum_i c_i = 1$.

3. Co ještě?

Stavy na hilbertovském svazu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

1. Pro $q \in H$, $||q|| = 1$, definujeme **vektorový stav**

$$s_q(\mathit{Lin}(\{y_1, \dots, y_n\})) = \sum_{i=1}^{n} (q \cdot y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \sphericalangle(q, y_i)$$

pro každou ortonormální bázi $(y_1, \dots, y_n)$ prostoru H

Důsledek: $s_q(q) = 1$

2. **Směs** vektorových stavů $\quad s(P) = \sum_i c_i s_{q_i}(P)$, kde $c_i > 0$, $\sum_i c_i = 1$.

3. Co ještě?

Nic!

Gleasonova věta [Gleason 57]: Pro $\dim H \geq 3$, všechny stavy jsou směsi vektorových stavů.

Klíčový případ: $H = \mathbb{R}^3$ (zjednodušeno v [Cooke, Keane, Moran 85]).

Důsledek 1: Zúžení stavů na 1D podprostory je spojité (dokázal [von Neumann 1932] dokonce pro $\mathbb{R}^2$, chybu odhalil [Hermann 1935]).

Důsledek 2: Konečněhodnotový stav je konstantní na 1D podprostorech, tj. dimenze.

Klíčový případ: $H = \mathbb{R}^3$ (zjednodušeno v [Cooke, Keane, Moran 85]).

Důsledek 1: Zúžení stavů na 1D podprostory je spojité (dokázal [von Neumann 1932] dokonce pro $\mathbb{R}^2$, chybu odhalil [Hermann 1935]).

Důsledek 2: Konečněhodnotový stav je konstantní na 1D podprostorech, tj. dimenze.

Klíčový důsledek: Neexistuje dvouhodnotový stav (=**skrytá proměnná**) (odpověď na [Einstein, Podolsky, Rosen 35], zjednodušené důkazy [Bell 64, Bell 66], [Kochen, Specker 67], ... , [Peres 95]).

Klíčový případ: $H = \mathbb{R}^3$ (zjednodušeno v [Cooke, Keane, Moran 85]).

Důsledek 1: Zúžení stavů na 1D podprostory je spojité (dokázal [von Neumann 1932] dokonce pro $\mathbb{R}^2$, chybu odhalil [Hermann 1935]).

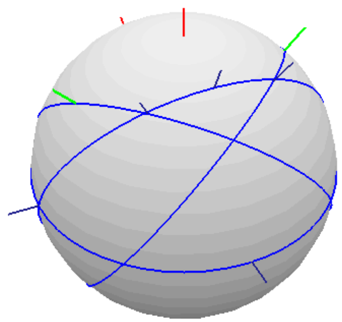
Důsledek 2: Konečněhodnotový stav je konstantní na 1D podprostorech, tj. dimenze.

Klíčový důsledek: Neexistuje dvouhodnotový stav (=**skrytá proměnná**) (odpověď na [Einstein, Podolsky, Rosen 35], zjednodušené důkazy [Bell 64, Bell 66], [Kochen, Specker 67], ... , [Peres 95]).

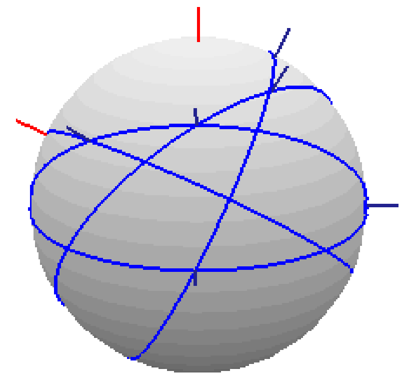
Neexistuje obarvení nenulových vektorů dvěma barvami (modrá, červená) takové, že každá ortogonální báze obsahuje právě jeden červený vektor.

Konstrukce dokazující neexistenci dvouhodnotových stavů na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

BGL



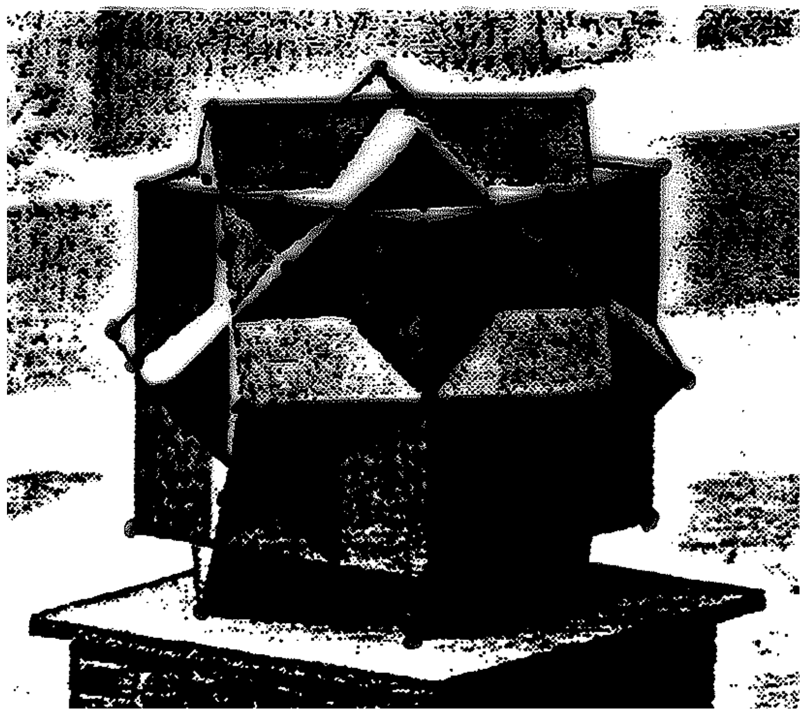
MGL



m p
1 2
3 4
5 6
7 8
9 10
11 12
13 14
15 16
17 18
19 20
21 22
23 24
25 26
27 28
29 30

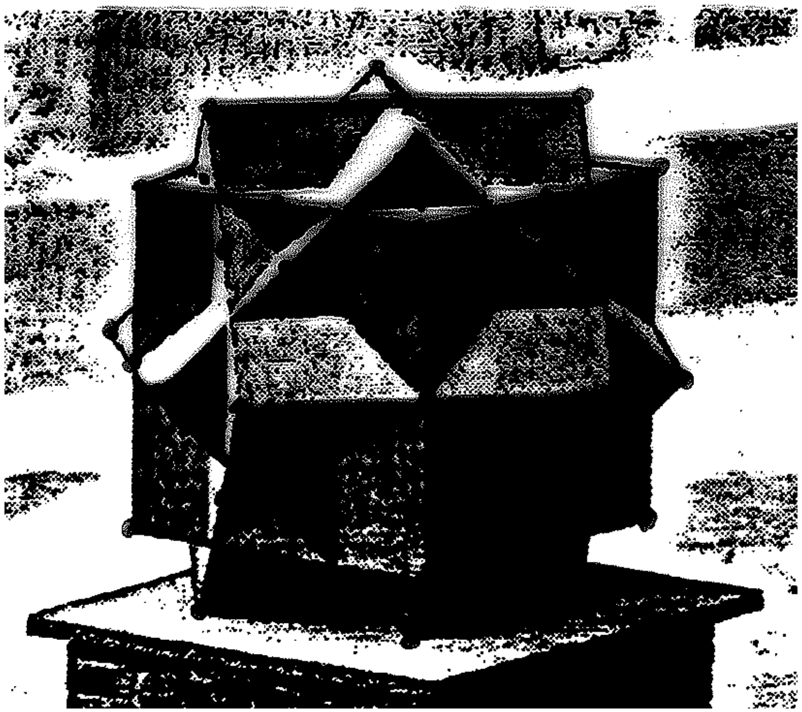
Existují konečné množiny vektorů, jejichž ortogonalita vylučuje existenci dvouhodnotového stavu.

Nejmenší známý používá 31 vektorů, následující jich má 33:



Existují konečné množiny vektorů, jejichž ortogonalita vylučuje existenci dvouhodnotového stavu.

Nejmenší známý používá 31 vektorů, následující jich má 33:



Otevřený problém: Existuje dvouhodnotový stav na $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^3)$?

Theorem: [Cabello] Neexistuje dvouhodnotový stav na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

Vezměme 36 vektorů v $\mathbb{R}^4$ ($\bar{1}$ značí -1):

1000	1000	0100	1111	1111	$111\bar{1}$	$11\bar{1}\bar{1}$	$111\bar{1}$	$11\bar{1}1$
0100	0010	0010	$11\bar{1}\bar{1}$	$1\bar{1}1\bar{1}$	$11\bar{1}1$	$1\bar{1}1\bar{1}$	$1\bar{1}11$	$1\bar{1}11$
0011	0101	1001	$1\bar{1}00$	$10\bar{1}0$	$1\bar{1}00$	1001	$10\bar{1}0$	$100\bar{1}$
$001\bar{1}$	$010\bar{1}$	$100\bar{1}$	$001\bar{1}$	$010\bar{1}$	0011	0110	0101	0110

Každý z 9 sloupců reprezentuje ortogonální bázi v $\mathbb{R}^4$ a každý vektor je **použit 2**$\times$.
Počet vektorů, na nichž je stav jednotkový, musí být současně sudý i lichý (9) – spor.

Theorem: ([Pták, MN 04], navázali [Harding, Jager, Smith])
Pro $n \geq 4$ neexistuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Theorem: ([Pták, MN 04], navázali [Harding, Jager, Smith])
Pro $n \geq 4$ neexistuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Otevřený problém: Existuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?

Důsledky pro groupověhodnotové stavy

Theorem: ([Pták, MN 04], navázali [Harding, Jager, Smith])
Pro $n \geq 4$ neexistuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Otevřený problém: Existuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?

$\iff$ Existuje obarvení nenulových vektorů na $\mathbb{R}^3$ dvěma barvami (modrá, červená) takové, že každá ortogonální báze obsahuje lichý počet červených vektorů?

Theorem: ([Pták, MN 04], navázali [Harding, Jager, Smith])
Pro $n \geq 4$ neexistuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Otevřený problém: Existuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?

$\Longleftrightarrow$ Existuje obarvení nenulových vektorů na $\mathbb{R}^3$ dvěma barvami (modrá, červená) takové, že každá ortogonální báze obsahuje lichý počet červených vektorů?

Míry nesplňující $s(\mathbf{1}) = 1$?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Důsledky pro groupověhodnotové stavy

Theorem: ([Pták, MN 04], navázali [Harding, Jager, Smith])
Pro $n \geq 4$ neexistuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Otevřený problém: Existuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?

$\iff$ Existuje obarvení nenulových vektorů na $\mathbb{R}^3$ dvěma barvami (modrá, červená) takové, že každá ortogonální báze obsahuje lichý počet červených vektorů?

Míry nesplňující $s(\mathbf{1}) = 1$?

Pro $n \geq 5$ takové míry neexistují v důsledku předchozích výsledků.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Theorem: ([Pták, MN 04], navázali [Harding, Jager, Smith])
Pro $n \geq 4$ neexistuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Otevřený problém: Existuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?

$\iff$ Existuje obarvení nenulových vektorů na $\mathbb{R}^3$ dvěma barvami (modrá, červená) takové, že každá ortogonální báze obsahuje lichý počet červených vektorů?

Míry nesplňující $s(\mathbf{1}) = 1$?

Pro $n \geq 5$ takové míry neexistují v důsledku předchozích výsledků.

Otevřený problém: Existují netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotové **míry** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$?

m p
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Theorem: ([Pták, MN 04], navázali [Harding, Jager, Smith])
Pro $n \geq 4$ neexistuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Otevřený problém: Existuje netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotový **stav** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?

$\iff$ Existuje obarvení nenulových vektorů na $\mathbb{R}^3$ dvěma barvami (modrá, červená) takové, že každá ortogonální báze obsahuje lichý počet červených vektorů?

Míry nesplňující $s(\mathbf{1}) = 1$?

Pro $n \geq 5$ takové míry neexistují v důsledku předchozích výsledků.

Otevřený problém: Existují netriviální $\mathbb{Z}_2$-hodnotové **míry** na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$?

$\iff$ Existuje obarvení nenulových vektorů na $\mathbb{R}^4$ dvěma barvami (modrá, červená) takové, že každá ortogonální báze obsahuje sudý počet červených vektorů?

Správná dedukce v klasické logice: 16 formulí v 11 proměnných

$d_1 \to \neg b_2$
$d_1 \to \neg b_3$
$d_2 \to a_2 \vee b_2$
$d_2 \to \neg b_3$
$d_3 \to \neg b_2$
$d_3 \to (a_1 \vee a_2 \to b_3)$
$d_4 \to a_2 \vee b_2$
$d_4 \to (a_1 \vee a_2 \to b_3)$
$(a_2 \vee c_1) \vee (b_3 \vee d_1)$
$(a_2 \vee c_2) \vee (a_1 \vee b_1 \to d_1)$
$c_2 \to b_3 \vee d_2$
$c_1 \to b_1 \vee d_2$
$(a_2 \vee c_1) \vee ((a_1 \vee a_2 \to b_3) \to d_3)$
$(a_2 \vee c_2) \vee (b_1 \vee d_3)$
$c_2 \to ((a_1 \vee a_2 \to b_3) \to d_4)$
$c_1 \to (a_1 \vee b_1 \to d_4)$

implikuje
$(a_1 \to a_2) \vee b_1$

Tato dedukce nefunguje v kvantové logice:
V hilbertovském svazu $L(\mathbb{R}^3)$ vezměme
$a_1 = (1, 0, 0)$
$a_2 = (0, 1, 0)$
$b_1 = (0, 1, 1)$
$b_2 = (1, 0, 1)$
$b_3 = (1, 1, 0)$
$c_1 = (1, 0, 2)$
$c_2 = (2, 0, 1)$
$d_1 = (-1, 1, 1)$
$d_2 = (1, -1, 1)$
$d_3 = (1, 1, -1)$
$d_4 = (1, 1, 1)$

Pak $(a_1 \to a_2) \vee b_1 = (1, 0, 0)'$

Stačí 3 proměnné a 9 formulí

$(a \vee c)' \vee b' \wedge (b \vee c) \vee (a \vee b)' \vee c' \wedge (a \vee b)$

$a' \wedge (a \vee c) \vee (b \vee c)' \vee (a \vee b)' \vee c' \wedge (a \vee b)$

$a' \wedge (a \vee c) \vee b' \wedge (b \vee c) \vee (a \vee b)' \vee c$

$b \vee b' \wedge (c \vee (a \vee c)') \vee (a \vee b) \wedge (c \vee (a \vee b)') \vee (a \vee c) \wedge (b \vee (b \vee c)')$

$b \vee b' \wedge (c \vee c' \wedge (a \vee b)) \vee (a \vee c)' \vee (a \vee c) \wedge (b \vee (b \vee c)')$

$b \vee c' \wedge (c \vee (a \vee b)') \vee (a \vee b) \wedge (c \vee (a \vee b)') \vee (b \vee c) \wedge (a \vee (a \vee c)')$

$b \vee c' \wedge (a \vee c) \vee a' \wedge (a \vee c) \vee (b \vee c) \wedge (a \vee (a \vee c)')$

$b \vee b' \wedge (c \vee (a \vee c)') \vee c' \wedge (a \vee b) \vee (a \vee (a \vee c)') \wedge (b \vee (b \vee c)')$

$b \vee b' \wedge (c \vee c' \wedge (a \vee b)) \vee a' \wedge (a \vee c) \vee (a \vee (a \vee c)') \wedge (b \vee (b \vee c)')$

Zjednodušení dle [Hyčko 05]

Stačí 3 proměnné a 9 formulí

$(a \vee c)' \vee b' \wedge (b \vee c) \vee (a \vee b)' \vee c' \wedge (a \vee b)$

$a' \wedge (a \vee c) \vee (b \vee c)' \vee (a \vee b)' \vee c' \wedge (a \vee b)$

$a' \wedge (a \vee c) \vee b' \wedge (b \vee c) \vee (a \vee b)' \vee c$

$b \vee b' \wedge (c \vee (a \vee c)') \vee (a \vee b) \wedge (c \vee (a \vee b)') \vee (a \vee c) \wedge (b \vee (b \vee c)')$

$b \vee b' \wedge (c \vee c' \wedge (a \vee b)) \vee (a \vee c)' \vee (a \vee c) \wedge (b \vee (b \vee c)')$

$b \vee c' \wedge (c \vee (a \vee b)') \vee (a \vee b) \wedge (c \vee (a \vee b)') \vee (b \vee c) \wedge (a \vee (a \vee c)')$

$b \vee c' \wedge (a \vee c) \vee a' \wedge (a \vee c) \vee (b \vee c) \wedge (a \vee (a \vee c)')$

$b \vee b' \wedge (c \vee (a \vee c)') \vee c' \wedge (a \vee b) \vee (a \vee (a \vee c)') \wedge (b \vee (b \vee c)')$

$b \vee b' \wedge (c \vee c' \wedge (a \vee b)) \vee a' \wedge (a \vee c) \vee (a \vee (a \vee c)') \wedge (b \vee (b \vee c)')$

Implikují a' jen v klasické logice (stejný protipříklad v hilbertovských svazech).

[Bell 64] Bell, J.S.: On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox. *Physics* **1** (1964), 195–200.

[Bell 66] Bell, J.S.: On the problem of hidden variables in quantum theory. *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966), 447–452.

[Birkhoff, vonNeumann 36] Birkhoff, G., von Neumann, J.: The logic of quantum mechanics. *Ann. Math.* **37** (1936), 823–843.

[Cooke, Keane, Moran 85] Cooke, R., Keane, M., Moran, W.: An elementary proof of Gleason's theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **98** (1985), 117–128.

[Dvurečenskij 93] Dvurečenskij, A.: *Gleason's Theorem and Its Applications.* Kluwer, Dordrecht/Boston/London & Ister Sci., Bratislava, 1993.

[Einstein, Podolsky, Rosen 35] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N.: Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* **47** (1935), 777–780.

[Gleason 57] Gleason, A.M.: Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. *J. Math. Mech.* **6** (1957), 885–893.

[Greechie 71] Greechie, R.J.: Orthomodular lattices admitting no states. *J. Comb. Theory* **10** (1971), 119–132.

[Gudder 66] Gudder, S.P.: Uniqueness and existence properties of bounded observables. *Pacific J. Math.* **19** (1966), 81–93.

[Harding, Jager, Smith] Harding, J., Jager, K., Smith, D.: Group-valued measures on the lattice of closed subspaces of a Hilbert space. *Internat. J. Theoret. Phys.* **44**, no. 5 (2005), 539–548.

[MN 95] Navara, M.: Uniqueness of bounded observables. *Ann. Inst. H. Poincaré — Theor. Physics* **63** (1995), no. 2, 155–176.

[Kalmbach 83] Kalmbach, G.: *Orthomodular Lattices*. Academic Press, London, 1983.

[MN 92] Navara, M.: Descriptions of state spaces of orthomodular lattices. *Math. Bohem.* **117** (1992), 305–313.

[MN 00] Navara, M.: State spaces of orthomodular structures. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* **31** (2000), Suppl. 1, 143–201.

[MN 04] Navara, M.: Piron's and Bell's geometrical lemmas. *Internat. J. Theoret. Phys.* **43** (2004), No. 7, 1587–1594.

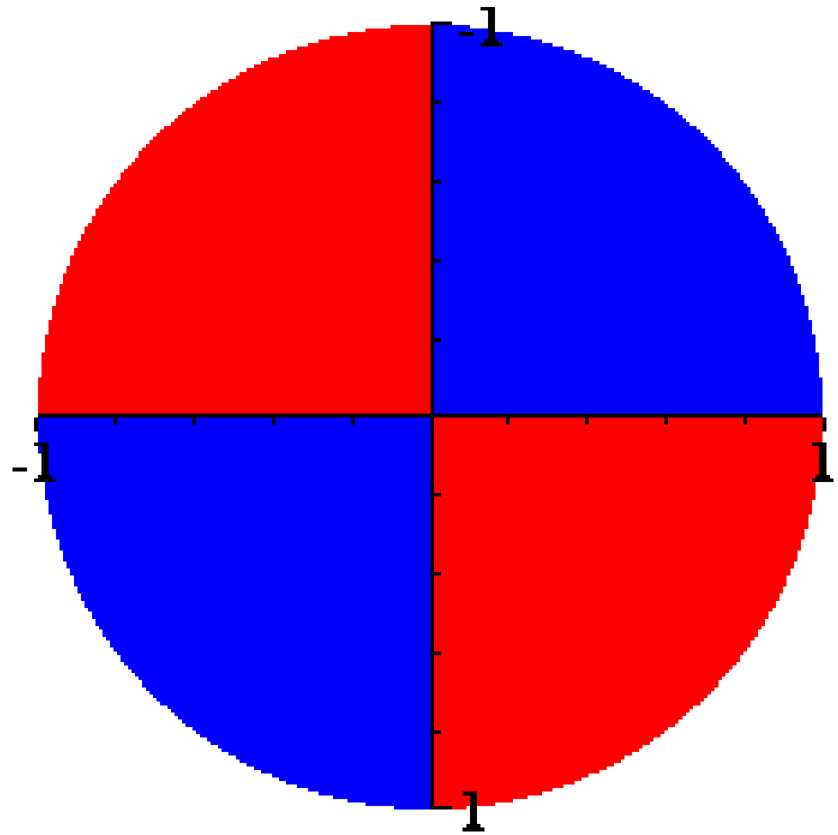
[MN 08] Navara, M.: Small quantum structures with small state spaces. *Internat. J. Theoret. Phys.* **47** (2008), No. 1, 36–43.

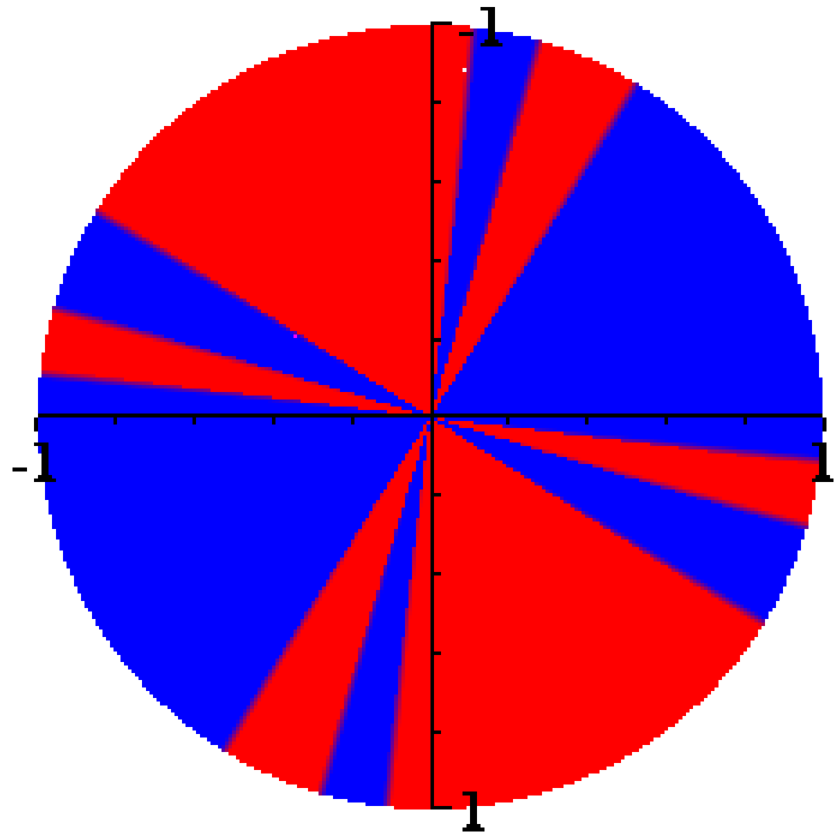
[Pták, MN 04] Navara, M., Pták, P.: For $n \geq 5$ there is no nontrivial Z_2-measure on $L(R^n)$. *Internat. J. Theoret. Phys.* **43** (2004), No. 7, 1595–1598.

[Pták, Pulmannová 91] Pták, P., Pulmannová, S.: *Orthomodular Structures as Quantum Logics*. Kluwer, Dordrecht/Boston/London, 1991.

[Riečanová 07] Riečanová, Z.: The existence of states on every Archimedean atomic lattice effect algebra with at most five blocks. Preprint, 2007.

[Shultz 74] Shultz, F.W.: A characterization of state spaces of orthomodular lattices. *J. Comb. Theory A* **17** (1974), 317–328.


-1
-1
1
1



-1
1
-1
1