VC-dimenze množin permutací

Josef Cibulka a Jan Kynčl

Katedra aplikované matematiky
Univerzita Karlova v Praze

29. října 2012 / Seminář Res Informatica

Acyklické množiny lineárních uspořádání

Volební systém:

1) Každý volič vybere pořadí kandidátů.
2) Výsledek je uspořádání, kde v každé dvojici (c_1, c_2) kandidátů, c_1 je výše než c_2 právě tehdy, když to tak chtěla většina voličů.

- Problém (Condorcetův paradox (1785)):

$$\left.\begin{array}{l} c_1 < c_2 < c_3 \\ c_2 < c_3 < c_1 \\ c_3 < c_1 < c_2 \end{array}\right\} \qquad c_1 < c_2 < c_3 < c_1$$

- **"Oprava":** Omezit množinu dovolených uspořádání.

Acyklické množiny lineárních uspořádání

Volební systém:

1) Každý volič vybere pořadí kandidátů.
2) Výsledek je uspořádání, kde v každé dvojici (c_1, c_2) kandidátů, c_1 je výše než c_2 právě tehdy, když to tak chtěla většina voličů.

- Problém (Condorcetův paradox (1785)):

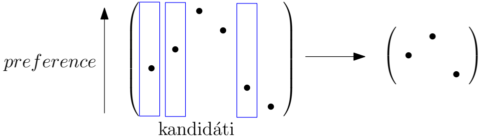
$$\left.\begin{array}{l} c_1 < c_2 < c_3 \\ c_2 < c_3 < c_1 \\ c_3 < c_1 < c_2 \end{array}\right\} \qquad c_1 < c_2 < c_3 < c_1$$

- **"Oprava":** Omezit množinu dovolených uspořádání.

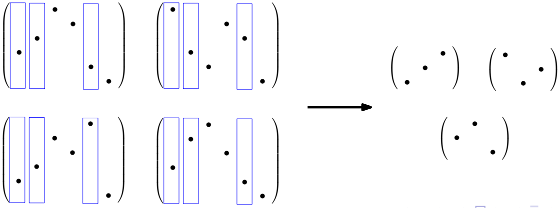
Restrikce a stopa

Analýza pro libovolný počet kandidátů:

- Nesmí se vyskytovat trojice kandidátů taková, že nějaká trojice dovolených uspořádání je uspořádává $c_1 < c_2 < c_3, c_2 < c_3 < c_1, c_3 < c_1 < c_2$.
- *Restrikce* na podmnožinu sloupců(kandidátů)



- *Stopa* množiny n-permutací na podmnožině sloupců.



Roztříštěná množina sloupců a VC-dimenze

- Řekneme, že k-tice sloupců je *roztříštěná* pokud stopa na této k-tici sloupců je tvořena všemi k-permutacemi
- *VC-dimenze* množiny $\mathcal{P}$ je velikost největší roztříštěné množiny sloupců.
- Příklad množiny s VC-dimenzí 2:

$$
\begin{pmatrix} & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \\ \bullet & & & & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \bullet & & & & & \\ & & & \bullet & & \\ & \bullet & & & & \\ & & & & \bullet & \\ & & \bullet & & & \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \bullet & & & & & \\ & & & \bullet & & \\ & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & \\ & & & & \bullet & \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \bullet & & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & \bullet & & & & \\ & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & \\ & & & & \bullet & \\ & & \bullet & & & \\ & & & & & \bullet \\ & & & \bullet & & \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} & & & \bullet & & \\ \bullet & & & & & \\ & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix}
$$

- **Množina uspořádání, pro kterou nemůže nastat volební paradox má VC-dimenzi nejvýše** 2**.**

Horní meze na velikost množin malé VC-dimenze

Jaká je maximální velikost, $r_k(n)$, množiny n-permutací VC-dimenze k?

Věta (Raz 2000)

$$r_2(n) \in 2^{\Theta(n)}$$

Věta (C., Kynčl 2012)

$$2^{n\gamma_k(n)} \leq r_k(n) \leq 2^{n\beta_k(n)} \text{, kde, například}$$

$$\gamma_3(n) \geq \log_2(\alpha(n)) - O(1),$$

$$\beta_3(n) \leq (4 + o(1)) \log_2(\alpha(n)),$$

$$\gamma_{2t+2}(n) \geq (1/t!)\alpha(n)^t - O(\alpha(n)^{t-1}) \text{ pro } t \geq 1,$$

$$\beta_{2t+2}(n) \leq (2/t!)\alpha(n)^t + O(\alpha(n)^{t-1}) \text{ pro } t \geq 2.$$

To znamená, že $r_k(n)$ je *kvaziexponenciální* pro $k \geq 3$.

Horní meze na velikost množin malé VC-dimenze

Jaká je maximální velikost, $r_k(n)$, množiny n-permutací VC-dimenze k?

Věta (Raz 2000)

$$r_2(n) \in 2^{\Theta(n)}$$

Věta (C., Kynčl 2012)

$$2^{n\gamma_k(n)} \leq r_k(n) \leq 2^{n\beta_k(n)}, \textit{ kde, například}$$
$$\gamma_3(n) \geq \log_2(\alpha(n)) - O(1),$$
$$\beta_3(n) \leq (4 + o(1)) \log_2(\alpha(n)),$$
$$\gamma_{2t+2}(n) \geq (1/t!)\alpha(n)^t - O(\alpha(n)^{t-1}) \textit{ pro } t \geq 1,$$
$$\beta_{2t+2}(n) \leq (2/t!)\alpha(n)^t + O(\alpha(n)^{t-1}) \textit{ pro } t \geq 2.$$

To znamená, že $r_k(n)$ je *kvaziexponenciální* pro $k \geq 3$.

Ackermannova funkce a její inverze

Jedna z definic:

$$A_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ 2n & \text{pro } k = 1, \\ A_{k-1}(A_k(n-1)) & \text{if } n > 0. \end{cases}$$

$$A_n = A_n(3)$$

$$\alpha_k(x) = \min\{n | A_k(n) \geq x\}$$
$$\alpha(x) = \min\{n | A(n) \geq x\}$$

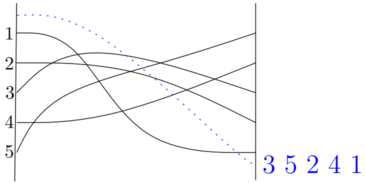
Nebo ekvivalentně:

$$\alpha_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ 1 + \alpha_k(\alpha_{k-1}(x)) & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Další výskyty množin permutací omezené dimenze

Arrangementy pseudopřímek

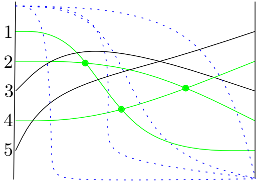
- Kolika způsoby lze přidat další?
- Počítáme jen ty začínající nad všemi již umístěnými
- Způsob přidání $=$ permutace pseudopřímek



Další výskyty množin permutací omezené dimenze

Arrangementy pseudopřímek

- Kolika způsoby lze přidat další?
- Počítáme jen ty začínající nad všemi již umístěnými
- Způsob přidání = permutace pseudopřímek
- VC-dimenze je 2 $\to$ exponenciální horní odhad



Kreslení (ne nutně rovinných) grafů

- Horní odhad na počet slabě neiomorfních nakreslení K_n s nejvýše jedním křížením na dvojici hran (Kynčl, 2012+).

Schéma důkazu hlavní věty

Množiny n-permutací

$n \times n$ $(0,1)$-matice

Posloupnosti nad n symboly

Schéma důkazu hlavní věty

Množiny n-permutací

Klazar (2000)
Raz (2000)

Alon and Fridgut (2000)

$n \times n$ $(0,1)$-matice

Füredi and Hajnal (1992)
Pettie (2010,2011)

Posloupnosti nad n symboly

Schéma důkazu hlavní věty: převody

$$1232241423431 \longrightarrow 12|32|24|1423|431 \longrightarrow \begin{array}{r} \\ 12 \to \\ 32 \to \\ 24 \to \\ 1423 \to \\ 431 \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & & \\ & \bullet & \bullet & \\ & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \end{array}$$

Posloupnost nad n symboly

(0, 1)-matice

$$\begin{pmatrix} \bullet & & & & \bullet & \\ & & & \bullet & & \\ & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \\ \bullet & & & & & \bullet \\ & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & & & \bullet & \\ & & & \bullet & & \\ & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \\ \bullet & & & & & \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & & & & & \\ & & & \bullet & & \\ & \bullet & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & & & \bullet \\ & & & & \bullet & \end{pmatrix} \cdots$$

(0,1)-matice

Množina permutací

Permutace se zakázanými vzorky

- Pokud je VC-dimenze rovna k, pak na každé $(k+1)$-ici sloupců chybí nějaká $(k+1)$-permutace (je *zakázaná*).
- Co když tato zakázaná permutace je stejná na všech $(k+1)$-icích sloupců?

Věta (Marcus, Tardos(2004), s využitím výsledku: Klazar (2000))

Zakážeme-li libovolnou pevnou permutaci, pak počet n-permutací, ve kterých chybí, je $2^{O(n)}$.

Permutace se zakázanými vzorky

- Pokud je VC-dimenze rovna k, pak na každé $(k+1)$-ici sloupců chybí nějaká $(k+1)$-permutace (je *zakázaná*).
- Co když tato zakázaná permutace je stejná na všech $(k+1)$-icích sloupců?

Věta (Marcus, Tardos(2004), s využitím výsledku: Klazar (2000))

Zakážeme-li libovolnou pevnou permutaci, pak počet n-permutací, ve kterých chybí, je $2^{O(n)}$.

Permutace se zakázanými vzorky – využití

Třídění čísel za omezených možností

- Na vstup přichází permutace čísel $1, \cdots, n$ v nějakém pořadí a na výstupu je chceme v rostoucím pořadí.
- Máme k dispozici jeden nebo více zásobníků a/nebo jednu nebo více front
- Povolené akce: číslo na vstupu poslat na výstup nebo na vrchol zásobníku (konec fronty); kdykoli můžeme číslo na vrchu zásobníku (začátku fronty) poslat na výstup.

Věta (Knuth (1968))

Permutace třiditelné s jedním zásobníkem jsou právě ty se zakázaným vzorkem 231. Jejich počet je $C_n < 4^n$ (n-té Catalanovo číslo).

Pozorování

Permutace třiditelné s $k-1$ frontami jsou právě ty se zakázaným vzorkem $(k+1)k\ldots 1$. Jejich počet je řádově k^{2n}.

Permutace se zakázanými vzorky – využití

Třídění čísel za omezených možností

- Na vstup přichází permutace čísel $1, \cdots, n$ v nějakém pořadí a na výstupu je chceme v rostoucím pořadí.
- Máme k dispozici jeden nebo více zásobníků a/nebo jednu nebo více front
- Povolené akce: číslo na vstupu poslat na výstup nebo na vrchol zásobníku (konec fronty); kdykoli můžeme číslo na vrchu zásobníku (začátku fronty) poslat na výstup.

Věta (Knuth (1968))

Permutace tříditelné s jedním zásobníkem jsou právě ty se zakázaným vzorkem 231. Jejich počet je $C_n < 4^n$ (n-té Catalanovo číslo).

Pozorování

Permutace tříditelné s $k-1$ frontami jsou právě ty se zakázaným vzorkem $(k+1)k \dots 1$. Jejich počet je řádově k^{2n}.

"Spravedlivé" dělení pizzy

Hádanka (Dan Brown 1996)

- Bernard rozdělí (kruhovou) pizzu na n různě velkých plátků.
- Alena si vezme první plátek dle vlastního výběru.
- Bernard a Alena se střídají: každý vezme jeden ze dvou plátků, které jsou na kraji zbývajícího kusu pizzy.
- Dokáže Alena vždy získat polovinu?
- Pokud je n sudé, Alena vždy získá polovinu.
- Důkaz: vybere si buď množinu lichých nebo množinu sudých plátků.

Věta (Winkler 2008)

Bernard dokáže pizzu rozdělit na 15 částí tak, že z ní vždy získá alespoň $5/9$.

Proof.

001010020100202 □

Věta (nezávisle Knauer, Micek, Ueckerdt 2011 a C., Kynčl, Mészáros, Stolař, Valtr 2010)

Alena dokáže vždy získat alespoň $4/9$.

"Spravedlivé" dělení pizzy

Hádanka (Dan Brown 1996)

- Bernard rozdělí (kruhovou) pizzu na n různě velkých plátků.
- Alena si vezme první plátek dle vlastního výběru.
- Bernard a Alena se střídají: každý vezme jeden ze dvou plátků, které jsou na kraji zbývajícího kusu pizzy.
- Dokáže Alena vždy získat polovinu?
- Pokud je n sudé, Alena vždy získá polovinu.
- Důkaz: vybere si buď množinu lichých nebo množinu sudých plátků.

Věta (Winkler 2008)

Bernard dokáže pizzu rozdělit na 15 částí tak, že z ní vždy získá alespoň $5/9$.

Proof.

001010020100202 □

Věta (nezávisle Knauer, Micek, Ueckerdt 2011 a C., Kynčl, Mészáros, Stolař, Valtr 2010)

Alena dokáže vždy získat alespoň $4/9$.

"Spravedlivé" dělení pizzy

Hádanka (Dan Brown 1996)

- Bernard rozdělí (kruhovou) pizzu na *n* různě velkých plátků.
- Alena si vezme první plátek dle vlastního výběru.
- Bernard a Alena se střídají: každý vezme jeden ze dvou plátků, které jsou na kraji zbývajícího kusu pizzy.
- Dokáže Alena vždy získat polovinu?
- Pokud je *n* sudé, Alena vždy získá polovinu.
- Důkaz: vybere si buď množinu lichých nebo množinu sudých plátků.

Věta (Winkler 2008)

Bernard dokáže pizzu rozdělit na 15 *částí tak, že z ní vždy získá alespoň* $5/9$.

Proof.

001010020100202 □

Věta (nezávisle Knauer, Micek, Ueckerdt 2011 a C., Kynčl, Mészáros, Stolař, Valtr 2010)

Alena dokáže vždy získat alespoň $4/9$.