Geometrické reprezentace binárních kódů

Pavel Rytíř

Katedra aplikované matematiky
Univerzita Karlova v Praze
školitel: Prof. RNDr. Martin Loebl, CSc.

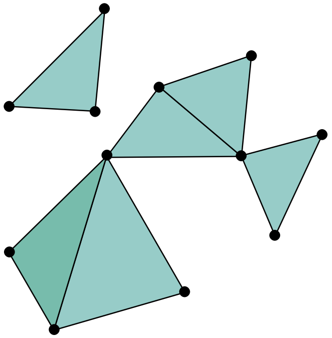
29. říjen, 2012
Seminář Res Informatica

2D simpliciální komplex

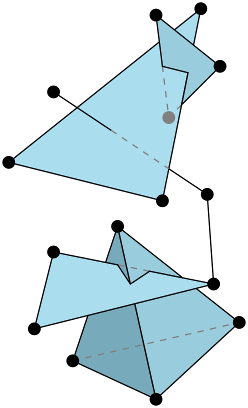
je množina X trojúhelníků, úseček a bodů v prostoru takové, že:

- každá stěna elementu X náleží do X
- průnik dvou elementů X je stěna obou dvou

(Množina trojúhelníků, které se vzájemně dotýkají pouze za hrany nebo vrcholy.)

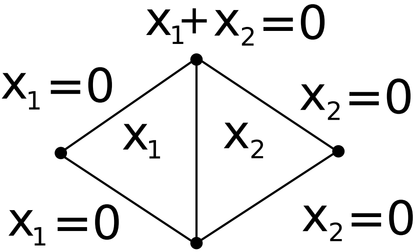


Množina trojúhelníků, která není simpliciální komplex

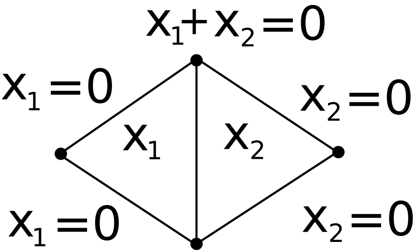


Prostor cyklů simpliciálního komplexu

- Každý trojúhelník odpovídá jedné proměnné.
- Každá hrana jedné rovnici nad tělesem $GF(2) = \{0, 1\}$.

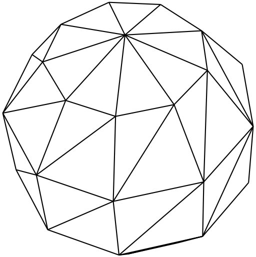


Prostor cyklů simpliciálního komplexu



- Řešení: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.
- Množina řešení takové soustavy se nazývá prostor cyklů.

Prostor cyklů simpliciálního komplexu



- Pro každou hranu spojující trojúhelníky i a j máme rovnici $x_i + x_j = 0$.
- Řešení: Všechna $x_i = 0$ nebo $x_i = 1$.

Prostor cyklů simpliciálního komplexu

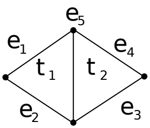
Incidenční matice $A = (A_{ij})$

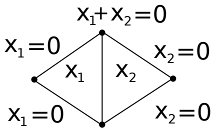
$$A_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{pokud hrana } e_i \text{ náleží do trojúhelníku } t_j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & t_j \\ e_i & \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

- Prostor cyklů je roven $\{x | Ax = 0\}$.

Prostor cyklů simpliciálního komplexu





Incidenční matice a prostor cyklů:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Řešení: } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

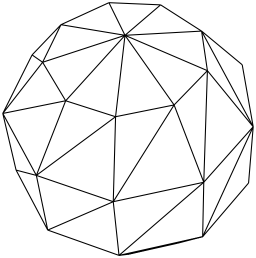
Binární lineární kódy

- Binární lineární kód je množina řešení nějaké rovnice $Ax = 0$ nad tělesem $GF(2)$.
- Příklad: $\{(0,0,0,0),(1,1,1,1)\}$.
- Použití: přenos dat, samoopravné kódy

Binární lineární kódy

- Binární lineární kód je množina řešení nějaké rovnice $Ax = 0$ nad tělesem $GF(2)$.
- Příklad: $\{(0,0,0,0),(1,1,1,1)\}$.
- Použití: přenos dat, samoopravné kódy
- Prostor cyklů každého simpliciální komplexu je binární lineární kód.
- Takový simpliciální komplex je geometrická reprezentace odpovídajícího kódu.

Geometrické reprezentace



- Tento simpliciální komplex reprezentuje kód:
- $\{0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0), (1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1)\}$

Propíchnutí kódu

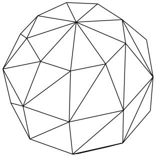
- Nechť C je binární lineární kód.
- Nechť S je množina souřadnic.
- Propíchnutí C podél S je kód C, ze kterého odstraníme souřadnice S.
- Formálně: $C/S := \{(c_i | i \notin S)_{i=1}^{n} | (c_1, \ldots, c_n) = c \in C\}$
- Příklad: $\{(0,0,0),(1,1,1)\}/\{1\} = \{(0,0),(1,1)\}$

Geometrické reprezentace

- Řekneme, že kód C má geometrickou reprezentaci, pokud existuje 2D simpliciální komplex Δ takový, že kód C je propíchnutý prostor cyklů simpliciálního komplexu Δ podél nějakých souřadnic.

Geometrické reprezentace

- Řekneme, že kód C má geometrickou reprezentaci, pokud existuje 2D simpliciální komplex Δ takový, že kód C je propíchnutý prostor cyklů simpliciálního komplexu Δ podél nějakých souřadnic.



- Tento simpliciální komplex reprezentuje například kód $\{(0,0),(1,1)\}$.

Geometrické reprezentace, moje výsledky

Theorem

Každý binární lineární kód C má geometrickou reprezentaci jako 2D simpliciální komplex.

- Možné aplikace: Výpočet váhového polynomu binarního kódu.

Děkuji za pozornost