NTIN060: Algoritmy a Datové struktury **28.4.2020**

Cvičení #11: Král a jeho synové

Miloš Chromý chromy@ktiml.mff.cuni.cz

1. **Multi Mergesort(MMS).** Popište třídicí algoritmus, který bude vstup rozkládat na více než dvě části a ty pak rekurzivně třídit. Může být rychlejší než náš Mergesort?

2. **Karacubův algoritmus.** Násobení dvou čísel X, Y, které mají n cifer provedeme tak, že čísla rozdělíme rozepíšeme:

$$X = A \cdot 10^{n/2} + B,$$

$$Y = C \cdot 10^{n/2} + D$$

kde A, B, C, D jsou čísla s $n/2$ cifry. Hledaný součin XY nalezneme

$$XY = AC \cdot 10^n + (AD + BC) \cdot 10^{n/2} + BD.$$

Jednociferná čísla umíme násobit v konstantním času. Dokažte časovou složitost takového násobení, rozdělením na 4 násobení čísel poloviční délky.

3. **KA.2** Co nás skutečně brzdí je počet násobení. Jak snížit počet násobení za pomoci následujícího součinu

$$(A + B)(C + D).$$

Jaká je časová složitost nyní?

4. **KA.3** U předchozího příkladu nastane problém s tím, že součet $A + C$ nebo $C + D$ může mít o jednu víc cifer než jsme chtěli, což nám může zmařit předchozí pokus o vylepšení. Upravte výpočet složitosti, aby stále fungoval.

5. **KA patch** Zkuste navrhnout řešení, které nemusí přepočítávat složitost, tedy nehrozí rozdělení násobení, které má n cifer na násobení čísel s $n/2 + 1$ ciframi, ale jen $n/2$ cifer.

6. **Jedlík.** Řešte "nekuchařkovou" rekurenci $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n \log n), T(1) = 1$

7. **Jedlík.2** Jiná "nekuchařková" rekurence: $T(n) = n^{1/2} \cdot T(n^{1/2}) + \Theta(n), T(1) = 1.$

8. **Kuchaři.** Nalezněte pro každý ze 3 případů q algoritmus, který má toto chování.

9. **Mocní.** Násobení dvou matic A, B má časovou složitost $O(n^c)$ pro vhodnou konstantu. Navrhněte algoritmus, který co nejrychleji spočte mocninu matice A^k.