

Cvičení #4

Miloš Chromý

chromy@ktiml.mff.cuni.cz

1. **Brno National Space Agency.** Jako projektant máte za cíl naplánovat stavbu vesmírného centra pro BNSA v Židenicích v Brně. Projekt má mnoho dílčích částí c_1, \dots, c_n . Pokud chci nějakou část splnit, musím nejdříve splnit všechny její závislosti. Navíc mi každá část c_i trvá t_i času. Z okolí máme téměř neomezený přísun dělníků, takže můžeme dělat libovolné množství částí najednou. Navrhněte algoritmus, jak naplánovat jaké části splnit, aby stavba byla skončena co nejdříve. *Zjednodušení* $t_i = 1$.
2. **Kritické projekty BNSA.** Projekt vesírného centra už je naplánován a stavbyvedoucí chce vědět, které části jsou kritické, aby osobně mohl dohlédnout na jejich dokončení. Kritická část je část, jejíž opožděním se zdrží celý projekt. Navrhněte algoritmus, který mu řekne, na jaké projekty má dohlédnout. *Jak vypadají všechny kritické části?*
3. **Dopravní situace.** Při konstrukci BNSA operuje PRA (Prague Republican Army), která chce zamezit dopravení materiálu na stavbu. Vojenští stratégové mají mapu silniční sítě (neorientovanou), po které můžou dopravovat stavební materiál a vybavení, znají pozici stavby S a pozice všech dodavatelů D_1, \dots, D_k . PRA má omezené zdroje, takže si může dovolit zničit pouze jednu silnici. Jak má BNSA rozmístit své bezpečnostní jednotky URNB, aby ochránila všechna kritická místa pomocí co nejméně pojízdných jednotek?
4. **DU.** Známá strana pirátů poskytla dar jednotkám PRA, takže PRA dokáže zneprůjezdnit nejen silnici, ale i křižovatku. Jak si má BNSA poradit?
5. **Boss PRA.** URNB nemá dostatek jednotek na pokrytí všech kritických křižovatek, takže chce zakročit a zbavit se vedoucího celé organizace PRA. U každého člena PRA ví, koho ovlivňuje a kým je ovlivňován. Jak co nejrychleji naleznou šéfa, který má vliv na celou skupinu, aby ho mohli zajmout? *Jde to v $O(n)$?*
6. **Svěřenecké fondy.** URNB zjistila, že PRA není vedena jediným vůdcem, ale je pod správou svěřeneckých fondů. Jak naleznou skupinu, která celou PRA ovládá, aby je mohla odstranit?

7. **Dag a topologické číslování.** Jak provést topologické třídění orientovaného grafu v čase $O(n + m)$?
8. **Počet všech cest.** Pro libovolné dva vrcholy v DAGu zjistěte počet všech cest mezi nimi.
9. **Počet nejkratších cest.** Pro libovolné dva vrcholy v grafu zjistěte počet všech nejkratších cest.
10. **Hodně cest.** Nalezněte orientovaný graf, ve kterém je $\Omega(2^n)$ nejkratších cest mezi dvěma vrcholy u, v .