Za domácí úkol máte příklady 1.3 a 7. Důkladně si přečtěte zadání!

U všech níže uvedených příkladů se snažte najít algoritmus, který zadanou úlohu vyřeší co možná nejrychleji s co nejmenší spotřebou paměti. Vždy uvádějte časovou a paměťovou složitost vašich algoritmů.

Příklad 1.

1. Máme danou posloupnost přirozených čísel $a_1, \ldots, a_n$. Jak si máme čísla uložit v paměti, abychom rychle dokázali odpovídat na následující dotazy: Pro dané indexy i a j určete součet čísel od i-té do j-té pozice (tj. určit $\sum_{k=i}^{j} a_k$).
2. Jak v dané posloupnosti přirozených čísel najít souvislou podposloupnost mající daný součet s?
3. Jak v dané posloupnosti celých čísel najít souvislou podposloupnost mající největší součet?

Příklad 2.

1. Máme danou matici (obdélníku) přirozených čísel A velikosti $n \times n$. Jak si máme čísla uložit v paměti, abychom rychle dokázali odpovídat na následující dotazy: Pro dané pozice (u, v) a (x, y) určete součet čísel v submatici ohraničené těmito pozicemi (tj. určit $\sum_{i=u}^{x} \sum_{j=v}^{y} A_{i,j}$).
2. Jak v daném matici celých čísel najít největší souvislou submatici obsahující pouze nuly?
3. Jak v daném matici přirozených čísel najít souvislou submatici mající daný součet s?

Příklad 3.

1. Pro daná přirozená čísla n a k spočítejte n^k.
2. Pro dané n najděte n-té Fibonacciho číslo.

Příklad 4. Mějme souvislý neorientovaný graf G. V jakém pořadí odtrhávat vrcholy tak, aby graf zůstával souvislý? Tj. najděte algorithmus, který najde posloupnost všech vrcholů $v_1, \ldots, v_n$ grafu G takovou, že $G \setminus \{v_1, \ldots, v_k\}$ je souvislý pro všechna $k = 1, \ldots, n-1$.

Příklad 5. Mějme neorientovaný graf G a počáteční vrchol s. Vymyslete algoritmus, který pro každý vrchol v najde nejen délku nejkratší cesty z s do v, ale i počet nejkratších cest. Dvě cesty z s do v považujeme za různé, pokud se liší v alespoň jednom vrcholu.

Příklad 6. Mějme bludiště zadané grafem. Víme, ve kterém vrcholu se nachází princezna a ve kterém se nachází vchod. Dále pro každou hranu známe vrchol, ve kterém se nachází klíč odemykající danou hranu. Najděte algoritmus, který rozhodne, zda je možné princeznu vysvobodit.

Příklad 7. Rozhodněte a dokažte, zda pro všechny dvojice funkcí $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ platí, že $f \in \mathcal{O}(g)$ nebo $g \in \mathcal{O}(f)$.