Úvod do umělé inteligence (NAIL120)

4. cvičení

Jirka Fink

https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Letni semestr 2021/22

Poslední změna 8. března 2022

2. domácí úkol: CSP

Zadání (zkráceno)

Pomocí CSP najděte úplné obarvení grafu (total chromatic index)

- Máme obarvit vrcholy i hrany grafu pomocí minimálního počtu barev
- Každé dva sousední vrcholy musí mít různou barvu
- Každé dvě hrany sdílející společný vrchol musí mít různou barvu
- Incidentní vrchol a hrana musí mít různou barvu

2. domácí úkol: CSP

Zadání (zkráceno)

Pomocí CSP najděte úplné obarvení grafu (total chromatic index)

- Máme obarvit vrcholy i hrany grafu pomocí minimálního počtu barev
- Každé dva sousední vrcholy musí mít různou barvu
- Každé dvě hrany sdílející společný vrchol musí mít různou barvu
- Incidentní vrchol a hrana musí mít různou barvu

Knihovny pro Python

- networkx: Knihovna pro práci s grafy
  `https://pypi.org/project/networkx/`
- python-constraint: Triviální řešič CSP
  `https://pypi.org/project/python-constraint/`

- Lineární programování
- Konvexní optimalizace
- Constraint satisfaction programming (splňování podmínek)
- SAT (splnitelnost logických formulí)
- Automatické plánování

Splnitelnost booleovské formule (SAT)

Popis úlohy pomocí SAT

- Konečná množina logických (binárním) proměnných, např. $x_1, x_2, \ldots$

Popis úlohy pomocí SAT

- Konečná množina logických (binárním) proměnných, např. $x_1, x_2, \ldots$
- Literál je buď proměnná x_1 nebo negace proměnné $\neg x_1$

Splnitelnost booleovské formule (SAT)

Popis úlohy pomocí SAT

- Konečná množina logických (binárním) proměnných, např. $x_1, x_2, \ldots$
- Literál je buď proměnná x_1 nebo negace proměnné $\neg x_1$
- Klauzule je disjunkce literálů, např. $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$

Popis úlohy pomocí SAT

- Konečná množina logických (binárním) proměnných, např. $x_1, x_2, \ldots$
- Literál je buď proměnná x_1 nebo negace proměnné $\neg x_1$
- Klauzule je disjunkce literálů, např. $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
- Formule v konjunktivní normální formě je konjunkce klauzulí, např. $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \& (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \& \neg x_1$

Popis úlohy pomocí SAT

- Konečná množina logických (binárním) proměnných, např. $x_1, x_2, \ldots$
- Literál je buď proměnná x_1 nebo negace proměnné $\neg x_1$
- Klauzule je disjunkce literálů, např. $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
- Formule v konjunktivní normální formě je konjunkce klauzulí, např. $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \& (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \& \neg x_1$
- Formule je splnitelná, pokud existuje ohodnocení všech proměnných logickými hodnotami takové, že celá formule je pravdivá, tj. v každé klauzuli je alespoň jeden literál pravdivý.

Splnitelnost booleovské formule (SAT)

Popis úlohy pomocí SAT

- Konečná množina logických (binárním) proměnných, např. $x_1, x_2, \ldots$
- Literál je buď proměnná x_1 nebo negace proměnné $\neg x_1$
- Klauzule je disjunkce literálů, např. $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
- Formule v konjunktivní normální formě je konjunkce klauzulí, např. $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \& (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \& \neg x_1$
- Formule je splnitelná, pokud existuje ohodnocení všech proměnných logickými hodnotami takové, že celá formule je pravdivá, tj. v každé klauzuli je alespoň jeden literál pravdivý.

Příklad

Rozhodněte, zda jsou následující formule splnitelné

- $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \& \neg x_1$

Splnitelnost booleovské formule (SAT)

Popis úlohy pomocí SAT

- Konečná množina logických (binárním) proměnných, např. $x_1, x_2, \ldots$
- Literál je buď proměnná x_1 nebo negace proměnné $\neg x_1$
- Klauzule je disjunkce literálů, např. $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
- Formule v konjunktivní normální formě je konjunkce klauzulí, např. $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)\&(x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)\&\neg x_1$
- Formule je splnitelná, pokud existuje ohodnocení všech proměnných logickými hodnotami takové, že celá formule je pravdivá, tj. v každé klauzuli je alespoň jeden literál pravdivý.

Příklad

Rozhodněte, zda jsou následující formule splnitelné

- $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)\&(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)\&\neg x_1$
- $(x_1 \vee x_2)\&(\neg x_1 \vee x_3)\&\neg x_2\&\neg x_3$

Perfektní párování

Příklad

- Perfektní párování grafu je podmnožina hran P taková, že každý vrchol má právě jednu incidentní hranu v P

Perfektní párování

Příklad

- Perfektní párování grafu je podmnožina hran P taková, že každý vrchol má právě jednu incidentní hranu v P
- Popište hledání perfektního párování pomocí SAT

Perfektní párování

Příklad

- Perfektní párování grafu je podmnožina hran P taková, že každý vrchol má právě jednu incidentní hranu v P
- Popište hledání perfektního párování pomocí SAT

Řešení pro obecné grafy

- Proměnné x_e pro všechny hrany e

Perfektní párování

Příklad

- Perfektní párování grafu je podmnožina hran P taková, že každý vrchol má právě jednu incidentní hranu v P
- Popište hledání perfektního párování pomocí SAT

Řešení pro obecné grafy

- Proměnné x_e pro všechny hrany e
- Každý vrchol u je incidentní alespoň s jednou hranou párování: $x_{uv_1} \vee \cdots \vee x_{uv_k}$, kde $v_1, \ldots, v_k$ jsou všechny vrcholy sousední s u

Perfektní párování

Příklad

- Perfektní párování grafu je podmnožina hran P taková, že každý vrchol má právě jednu incidentní hranu v P
- Popište hledání perfektního párování pomocí SAT

Řešení pro obecné grafy

- Proměnné x_e pro všechny hrany e
- Každý vrchol u je incidentní alespoň s jednou hranou párování: $x_{uv_1} \vee \cdots \vee x_{uv_k}$, kde $v_1, \ldots, v_k$ jsou všechny vrcholy sousední s u
- Pro každé dvě hrany e, f sdílející společný vrchol je nejvýše jedna v párování: $\neg x_e \vee \neg x_f$

Perfektní párování

Příklad

- Perfektní párování grafu je podmnožina hran P taková, že každý vrchol má právě jednu incidentní hranu v P
- Popište hledání perfektního párování pomocí SAT

Řešení pro obecné grafy

- Proměnné x_e pro všechny hrany e
- Každý vrchol u je incidentní alespoň s jednou hranou párování: $x_{uv_1} \vee \cdots \vee x_{uv_k}$, kde $v_1, \ldots, v_k$ jsou všechny vrcholy sousední s u
- Pro každé dvě hrany e, f sdílející společný vrchol je nejvýše jedna v párování: $\neg x_e \vee \neg x_f$

Alternativní pohled pro bipartitní grafy

- Máme bipartitní graf mezi vrcholy A a B, kde $|A| = |B|$

Perfektní párování

Příklad

- Perfektní párování grafu je podmnožina hran P taková, že každý vrchol má právě jednu incidentní hranu v P
- Popište hledání perfektního párování pomocí SAT

Řešení pro obecné grafy

- Proměnné x_e pro všechny hrany e
- Každý vrchol u je incidentní alespoň s jednou hranou párování: $x_{uv_1} \vee \cdots \vee x_{uv_k}$, kde $v_1, \ldots, v_k$ jsou všechny vrcholy sousední s u
- Pro každé dvě hrany e, f sdílející společný vrchol je nejvýše jedna v párování: $\neg x_e \vee \neg x_f$

Alternativní pohled pro bipartitní grafy

- Máme bipartitní graf mezi vrcholy A a B, kde $|A| = |B|$
- Perfektní párování bijektivně přiřazuje prvkům z A prvky z B

Perfektní párování

Příklad

- Perfektní párování grafu je podmnožina hran P taková, že každý vrchol má právě jednu incidentní hranu v P
- Popište hledání perfektního párování pomocí SAT

Řešení pro obecné grafy

- Proměnné x_e pro všechny hrany e
- Každý vrchol u je incidentní alespoň s jednou hranou párování: $x_{uv_1} \vee \cdots \vee x_{uv_k}$, kde $v_1, \ldots, v_k$ jsou všechny vrcholy sousední s u
- Pro každé dvě hrany e, f sdílející společný vrchol je nejvýše jedna v párování: $\neg x_e \vee \neg x_f$

Alternativní pohled pro bipartitní grafy

- Máme bipartitní graf mezi vrcholy A a B, kde $|A| = |B|$
- Perfektní párování bijektivně přiřazuje prvkům z A prvky z B
- Proměnná x_{uv} určuje, zda je prvku $u \in A$ přiřazen prvek $v \in B$

Perfektní párování

Příklad

- Perfektní párování grafu je podmnožina hran P taková, že každý vrchol má právě jednu incidentní hranu v P
- Popište hledání perfektního párování pomocí SAT

Řešení pro obecné grafy

- Proměnné x_e pro všechny hrany e
- Každý vrchol u je incidentní alespoň s jednou hranou párování: $x_{uv_1} \vee \cdots \vee x_{uv_k}$, kde $v_1, \ldots, v_k$ jsou všechny vrcholy sousední s u
- Pro každé dvě hrany e, f sdílející společný vrchol je nejvýše jedna v párování: $\neg x_e \vee \neg x_f$

Alternativní pohled pro bipartitní grafy

- Máme bipartitní graf mezi vrcholy A a B, kde $|A| = |B|$
- Perfektní párování bijektivně přiřazuje prvkům z A prvky z B
- Proměnná x_{uv} určuje, zda je prvku $u \in A$ přiřazen prvek $v \in B$
- Podmínky zůstávají stejné.

Další příklady

Popište sudoku jako úlohu SAT

Další příklady

Popište sudoku jako úlohu SAT

Testování lidí na covid

- Každé testovací místo má danou kapacitu

Další příklady

Popište sudoku jako úlohu SAT

Testování lidí na covid

- Každé testovací místo má danou kapacitu
- Každý člověk smí jet jen do některých testovacích míst, aniž by porušil nařízení premiéra

Další příklady

Popište sudoku jako úlohu SAT

Testování lidí na covid

- Každé testovací místo má danou kapacitu
- Každý člověk smí jet jen do některých testovacích míst, aniž by porušil nařízení premiéra
- Popište hledání přiřazení lidí testovacím místům pomocí SAT

Další příklady

Popište sudoku jako úlohu SAT

Testování lidí na covid

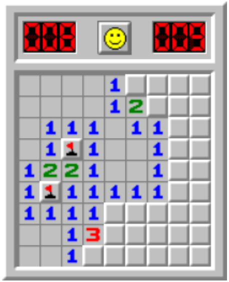
- Každé testovací místo má danou kapacitu
- Každý člověk smí jet jen do některých testovacích míst, aniž by porušil nařízení premiéra
- Popište hledání přiřazení lidí testovacím místům pomocí SAT

Souvislost

Rozhodnout, zda dané dva vrcholy leží ve stejné komponentě grafu

Hledání min

Je možné na hru hledání min (minespeeper) použít SAT nebo CSP řešič?



SAT vs. CSP

- Je možné SAT převést na CSP?
  Formálně: Je možné každou instanci SAT převést na instanci CSP mající stejné řešení?
- Je možné CSP převést na SAT?
  Formálně: Je možné každou instanci CSP převést na instanci SAT mající stejné řešení?

CNF vs. DNF

Pojmy

- Formule v konjunktivní normální formě (CNF) je konjunkce klauzulí
  např. $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \& (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \& \neg x_1$
- Formule v disjunktivní normální formě (DNF) je disjunkcí P-termů, kde P-term je konjunkce literálů
  např. $(x_1 \& \neg x_2 \& x_3) \vee (x_2 \& \neg x_3 \& \neg x_4) \vee \neg x_1$

CNF vs. DNF

Pojmy

- Formule v konjunktivní normální formě (CNF) je konjunkce klauzulí
  např. $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)\&(x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)\&\neg x_1$
- Formule v disjunktivní normální formě (DNF) je disjunkcí P-termů, kde P-term je konjunkce literálů
  např. $(x_1\&\neg x_2\&x_3) \vee (x_2\&\neg x_3\&\neg x_4) \vee \neg x_1$

Algoritmy a složitost

- Jak najít splnitelné ohodnocení formulí v CNF a DNF?
- Jaká je algoritmická složitost rozhodovacích problémů, zda formule v CNF a DNF je splnitelná?

3. domácí úkol: SAT

Zadání (zkráceno)

Pomocí SAT najděte úplné obarvení grafu (total chromatic index)

- Máme obarvit vrcholy i hrany grafu pomocí minimálního počtu barev
- Každé dva sousední vrcholy musí mít různou barvu
- Každé dvě hrany sdílející společný vrchol musí mít různou barvu
- Incidentní vrchol a hrana musí mít různou barvu

3. domácí úkol: SAT

Zadání (zkráceno)

Pomocí SAT najděte úplné obarvení grafu (total chromatic index)

- Máme obarvit vrcholy i hrany grafu pomocí minimálního počtu barev
- Každé dva sousední vrcholy musí mít různou barvu
- Každé dvě hrany sdílející společný vrchol musí mít různou barvu
- Incidentní vrchol a hrana musí mít různou barvu

Knihovny pro Python

- networkx: Knihovna pro práci s grafy
  `https://pypi.org/project/networkx/`
- python-sat: Řešič problému SAT
  `https://pypi.org/project/python-sat/`

Co dělat, když je výpočet pomalý

1. Nejprve zjistit, která část programu trvá nejdelší čas
   - Vytvoření CSP/SAT problému
   - Vyřešení problému
   - Získání řešení z řešiče a nastavení barev

Co dělat, když je výpočet pomalý

1. Nejprve zjistit, která část programu trvá nejdelší čas
   - Vytvoření CSP/SAT problému
   - Vyřešení problému
   - Získání řešení z řešiče a nastavení barev
2. Určit kolik CSP/SAT problémů se na každý grafy vytváří

Co dělat, když je výpočet pomalý

1. Nejprve zjistit, která část programu trvá nejdelší čas
   - Vytvoření CSP/SAT problému
   - Vyřešení problému
   - Získání řešení z řešiče a nastavení barev
2. Určit kolik CSP/SAT problémů se na každý grafy vytváří
3. Jestliže je pomalé vytváření CSP/SAT problému
   - Jaká je časová složitost? Nelze ji zlepšit?
   - Časová složitost vytváření úlohy by měla být stejná jako velikost CSP/SAT problému
   - Například procházení všech dvojic hran je zbytečně pomalé

2. a 3. domácí úkol: CSP a SAT

Co dělat, když je výpočet pomalý

1. Nejprve zjistit, která část programu trvá nejdelší čas
   - Vytvoření CSP/SAT problému
   - Vyřešení problému
   - Získání řešení z řešiče a nastavení barev
2. Určit kolik CSP/SAT problémů se na každý grafy vytváří
3. Jestliže je pomalé vytváření CSP/SAT problému
   - Jaká je časová složitost? Nelze ji zlepšit?
   - Časová složitost vytváření úlohy by měla být stejná jako velikost CSP/SAT problému
   - Například procházení všech dvojic hran je zbytečně pomalé
4. Jestliže je pomalé řešení CSP/SAT problému
   - Nejsou některé podmínky duplicitní?
     Například nemá smysl dávat podmínky $x \neq y$ a $y \neq x$
   - Nejde některou podmínku logicky odvodit z ostatních?
     Například AllDifferent(x,y,z) implikuje AllDifferent(x,y)
   - Nejde formulaci některých podmínek zjednodušit?
     Například AllDifferent(x,y,z) pro všechna x,y,z
   - Zkusit použít jiný algoritmus nabízený knihovnou