Příklad 1. Jak byste zjistili, zda vstup programu obsahuje slovo BARBORA jako podřetězec?

Definice 1.
- Abeceda X je konečná neprázdná množina znaků.
- Slovo je konečná posloupnost prvků z X.
- Prázdné slovo značíme $\lambda \notin X$.
- Množinu všech slov nad abecedou X značíme $X^\star$.
- Jazyk $L \subseteq X^\star$ je množina slov nad abecedou X.

Příklad 2. Sestrojte konečný automat rozpoznávající následující jazyky.
- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^*;\ \text{ délka slova } w \text{ je lichá } \}$
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^*;\ \ w \text{ obsahuje sudý počet nul a počet jedniček dělitelný třemi } \}$
- $L_3 = \{w \in \{0,1\}^*;\ w \text{ je binární zápis čísla dělitelného } 7\}$

Definice 2. Konečný automat je pětice (Q, X, δ, q_0, F), kde
- Q je konečná množina stavů
- X je abeceda
- $\delta : Q \times X \to Q$ je přechodová funkce
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $F \subseteq Q$ je množina příjmajících stavů

Definice 3. Jazyk L je regulární, jestliže je rozpoznatelný nějakým konečným automatem, tj. existuje konečný automat příjmající právě slova z L.

Příklad 3. Dokažte, že je-li jazyk L regulární, pak i doplněk $X^\star \setminus L$ je regulární.

Příklad 4. Sestrojte konečný automat rozpoznávající jazyk, který obsahuje všechna slova nad abecedou $\{0,1\}$, která mají počet nul dělitelný třemi a zároveň jejich binární zápis čísla je dělitelný pěti.

Příklad 5. Dokažte, že jsou-li jazyky L_1 a L_2 regulární, pak i jazyky $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$ a $L_1 \setminus L_2$ jsou regulární.

Příklad 6. Dokažte, že následující jazyky nejsou regulární.
- $L_1 = \{0^i 1^i;\ i \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{ww;\ w \in X^\star\}$

Definice 4. K přechodové funkci $\delta : Q \times X \to Q$ definujme rozšířenou přechodovou $\delta : Q \times X^\star \to Q$ předpisy
- $\delta^\star(q, \lambda) = q$ pro $q \in Q$ a
- $\delta^\star(q, wx) = \delta(\delta^\star(q, w), x)$ pro $q \in Q$, $x \in X$ a $w \in X^\star$.

Příklad 7 (Pozorování)**.** Jestliže se konečný automat po přečtení slov $u, v \in X^\star$ dostane do stejného stavu, pak se konečný automat po přečtení slov $uw, vw \in X^\star$ též dostane do stejného stavu pro každé slovo $w \in X^\star$. Formálně: $\delta^\star(q_0, u) = \delta^\star(q_0, v) \Rightarrow \delta^\star(q_0, uw) = \delta^\star(q_0, vw)\ \forall w \in X^\star$.

Věta 5 (Myhill–Neroda)**.** Jazyk L je regulární právě tehdy, když všechna slova nad X lze rozdělit do konečně mnoha tříd tak, že
- pro dvě slova u a v ze stejné třídy platí, že slova uw a vw patří do stejné třídy pro všechna slova w nad X, a
- L je sjednocení některých z těchto tříd.

Příklad 8. Dokažte, že pro libovolné slovo u jsou následující jazyky regulární.
- Jazyk všech slov začínajících na u.
- Jazyk všech slov končících na u.

- Jazyk všech slov začínajících i končících na u.

Příklad 9. Dokažte, že následující jazyky nejsou regulární.

- $L_1 = \{0^i 1^j;\ i \leq j\}$
- $L_1 = \{0^i 1^j;\ i \geq j\}$

Příklad 10. Jestliže konečný automat má n stavů, pak při čtení slova libovolného slova délky alespoň n naštíví některý stav alespoň dvakrát. Tudíž každé slovo délky alespoň n lze rozdělit na tři části u, v a w tak, že

- $v \neq \lambda$,
- delká slova uv je nejvýše n a
- konečný automat po přečtení slov uv^iw zkončí ve stejném stavu pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$, tj. $\delta^\star(q_0, uw) = \delta^\star(q_0, uv^iw)$.

Lemma 6. (Pumping) Nechť L je regulární jazyk, pak existuje $n \in \mathbb{N}$, že libovolné slovo $z \in L$ délky alespoň n lze napsat ve tvaru $z = uvw$, kde

- $v \neq \lambda$,
- delká slova uv je nejvýše n a
- $uv^iw \in L$ pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 11. Popište všechny regulární jazyky nad jednoprvkovou abecedou.

Příklad 12 (Domácí úkol)**.** Rozhodněte, zda jazyk $L = \{1^p;\ p \text{ je prvočíslo}\}$ je regulární.