

Věta 1 (Bezkontextové pumping lemma). Je-li L bezkontextový jazyk nad abecedou X , pak existují $n, m \in \mathbb{N}$ takové, že každé slovo $z \in L$ délky alespoň n lze rozdělit na pět částí $uvwxy$ tak, že

- délka vw je nejvýše m ,
- slovo vx je neprázdné a
- slovo uv^iwx^iy je z jazyka L pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 1. Rozhodněte, které z následujících jazyků jsou bezkontextové.

- $L = \{ww; w \in \{a, b\}^*\}$
- $L = \{ww; w \in \{a\}^*\}$
- $L = \{a^ib^i; i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^ib^j; i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^ia^jb^j; i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^ib^ja^i; i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^ib^ia^j; i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^ib^ja^k; i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^ib^ic^i; i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^ib^ja^k; i, j, k \in \mathbb{N}_0, i \leq j \leq k\}$
- $L = \{ww^R; w \in \{a, b\}^*\}$
- $L = \{a^{2i}; i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^{2^i}; i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^{i^2}; i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^{i^2+i+1}; i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^{3i}; i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^{3^i}; i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^{i^3}; i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L = \{a^p; p \text{ je prvočíslo}\}$
- $L = \{a^{p+q}; p, q \text{ jsou různá prvočísla}\}$

Definice 2 (Zásobníkový automat). Zásobníkový automat Z je $(Q, X, Y, \delta, q_0, z_0, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů
- X je konečná vstupní abeceda
- Y je konečná zásobníková abeceda
- $\delta : Q \times (X \cup \{\lambda\}) \times Y \rightarrow 2^{Q \times Y^*}$ taková, že množina $\delta(q, x, y)$ je vždy konečná
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $z_0 \in Y$ je počáteční zásobníkový symbol
- $F \subseteq Q$ je množina přijímacích stavů

Definice 3 (Deterministický zásobníkový automat). Zásobníkový automat $(Q, X, Y, \delta, q_0, z_0, F)$ je deterministický, jestliže

- množina $\delta(q, x, y)$ vždy obsahuje nejvýše jeden prvek
- jestliže $\delta(q, \lambda, y)$ je neprázdná, pak $\delta(q, x, y)$ je prázdná pro všechna $x \in X$

Příklad 2. Navrhněte zásobníkové automaty pro následující jazyky.

- $L = \{waw^R; w \in \{a, b\}^*\}$
- $L = \{ww^R; w \in \{a, b\}^*\}$
- $L = \{w; w \in \{a, b\}^*, |w|_0 = |w|_1\}$
- $L = \{vcw; v, w \in \{a, b\}^*, |v| \neq |w|\}$
- $L_i = \{vcw; v, w \in \{a, b\}^*, v[i] \neq w[i]\}$

f) $L = \{vcw; v, w \in \{a, b\}^*, v \neq w\}$

g) $L = \{a^i b^j c^{i+j}; i, j \in \mathbb{N}_0\}$

h) $L = \{a^i b^j c^{ij}; i, j \in \mathbb{N}_0\}$

Příklad 3 (Domácí úkol). Rozhodněte a dokažte, zda jazyk $L = \{a^i b^j c^{ij}; i, j \in \mathbb{N}_0\}$ je bezkontextový.