Definice 1. Nedeterministický konečný automat je pětice (Q, X, δ, S_0, F), kde

- Q je konečná množina stavů
- X je abeceda
- $\delta : Q \times X \to 2^Q$ je přechodová funkce
- $S_0 \subseteq Q$ je množina počátečních stavů
- $F \subseteq Q$ je množina příjmajících stavů

Příklad 1. K následujícímu nedeterministickému konečnému automatu sestrojte ekvivalentní deterministický konečný automat. Výsledný KA zredukujte.

	a	b
↔A	$\{A, C\}$	$\{B\}$
B	$\{B, D\}$	$\emptyset$
→C	$\emptyset$	$\emptyset$
←D	$\{A\}$	$\{C, D\}$

Definice 2. Mějme konečné automaty $A = (Q_A, X, \delta_A, q_{A0}, F_A)$ a $B = (Q_B, X, \delta_B, q_{B0}, F_B)$. Zobrazení $h : A \to B$ se nazývá *automatový homomorfism*, jestliže

- $h(q_{A0}) = q_{B0}$,
- $h(\delta_A(q, x)) = \delta_B(h(q), x)$ pro $q \in Q_A$ a $x \in X$ a
- $q \in F_A \Leftrightarrow h(q) \in F_B$.

Homomorfismus, který je prostý a na, nazýváme izomorfismem. Automaty jsou izomorfní, jestliže mezi nimi existuje automatový izomorfismus.

Definice 3. Konečné automaty jsou ekvivalentní, jestliže příjmají stejný jazyk.

Věta 4. Když existuje homomorfismus konečných automatů A a B, pak jsou A a B ekvivalentní.

Definice 5. Stavy p, q konečného automatu jsou ekvivaletní (značíme $p \sim q$), jestliže $\delta^\star(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^\star(q, w) \in F$ pro všechna slova $w \in X^\star$.

Definice 6. Ekvivalence $\approx$ na množine stavů konečného automatu je automatovou kongruencí, jestliže dva stavy p, q ze stejné třídy $Q/\approx$ platí

- $p \in F \Leftrightarrow q \in F$ a
- $\delta(p, x) \approx \delta(q, x)$ pro všechna $x \in X$.

Podílový automat je automat na stavech $Q/\approx$.

Věta 7. Stavová ekvivalence je automatovou kongruencí. Podílový automat je ekvivaletní s původním automatem.

Příklad 2.

- Je stavová ekvivalence po i krocích automatovou kongruencí?
- Uveďte příklad automatové kongruence jiný než je stavová ekvivalence.

Definice 8. Konečný automat je redukovaný, jestliže jsou všechny jeho stavy dosažitelné a žádné dva stavy nejsou ekvivalentní. Konečný automat B je reduktem konečného automatu A, jestliže B je redukovaný a L(A)=L(B).

Definice 9 (Konstrukce stavové ekvivalence)**.** Matematickou indukcí definujeme ekvivalence $\sim_i$ na Q pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$ takto:

- $p \sim_0 q$ jestliže $p \in F \Leftrightarrow q \in F$
- $p \sim_{i+1} q$ jestliže $p \sim_i q$ a $\delta(p, x) \sim_i \delta(q, x)$ pro všechna $x \in X$.

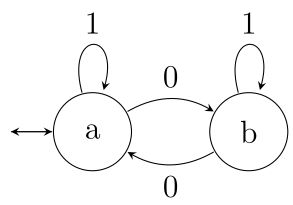
Věta 10. Pro každé dva stavy p, q platí $p \sim_i q$ právě tehdy, když $\delta^\star(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^\star(q, w) \in F$ pro všechna slova $w \in X^\star$ délky nejvýše i.

Pro konečný automat na n stavech jsou relace $\sim$ a $\sim_i$ stejné pro všechna $i \geq n$.

Věta 11. Redukované konečné automaty A a B, jsou ekvivalentní, právě když jsou A a B izomorfní.

Příklad 3. Řekneme, že A je *homomorfní na* B, pokud existuje (automatový) homomorfismus $h : Q_A \to Q_B$. Je tato relace reflexivní, symetrická, tranzitivní?

Příklad 4. Uvažme následující konečný automat C. Nalezněte konečné automaty A, B takové, že A i B jsou homomorfní na C (a přitom ne naopak), A není homomorfní na B a B není homomorfní na A.



Příklad 5. Jaký je maximalní počet kroků k sestrojení stavové ekvivalence automatu na n stavech? Formalně: pro každé přirozené n najděte maximalní možné i takové, že existuje n-statový konečný automat, jehož stavové ekvivalence $\sim_i$ a $\sim_{i-1}$ jsou různé.

Příklad 6. Pro každé $n \geq 2$ nalezněte n-stavový automat, jehož stavová ekvivalence je stavovou ekvivalencí po $n-2$ krocích a přitom ne po $n-3$ krocích.

Příklad 7. Najděte ekvivalentní stavy v následujících konečných automatech (najděte konečný automat s příjmající stejný jazyk s nejmenším možným počtem stavů).

	a	b
↔ 0	0	5
1	1	3
2	2	7
3	3	2
← 4	4	1
5	5	1
← 6	6	2
7	7	0

	a	b
A	A	F
B	B	A
C	C	D
D	D	B
E	E	C
↔F	F	E

	a	b
→1	2	3
2	2	4
←3	3	5
4	2	7
←5	6	3
←6	6	6
7	7	4
8	2	3
9	9	4

Příklad 8 (Domácí úkol)**.** Najděte ekvivalentní stavy v následujících konečných automatech (najděte konečný automat s příjmající stejný jazyk s nejmenším možným počtem stavů).

	a	b
A	H	G
B	B	A
C	E	D
D	D	B
E	C	D
F	F	E
G	G	F
↔H	A	G

	a	b
↔0	1	2
1	3	0
2	4	5
3	0	2
4	2	5
5	0	3

	a	b
→0	1	2
1	0	3
2	4	1
3	0	1
←4	2	2
5	4	3