Příklad 1. Rozhodněte, zda pro každý regulární jazyk L je i jazyk $L' = \{uv;\ vu \in L\}$ regulární, tj. ze slova jazyka L délky k vytvoříme rotací k slov, která vložíme do L'.

Řešení. Nechť $A = (Q = \{q_1, \dots, q_n\}, \Sigma, \delta, s, F)$ je deterministický automat přijímající L. Pro každý stav $p \in Q$ uvažme dvě kopie automatu A s předefinovaným počátečním a koncovými stavy

$$A^u = (\{q_1^u, \dots, q_n^u\}, \Sigma, \delta^u, p^u, \{q^u;\ q \in F\}), \quad A^v = (\{q_1^v, \dots, q_n^v\}, \Sigma, \delta^v, s^v, p^v),$$

kde přechodové funkce δ^u, δ^v pouze kopírují δ, přesněji

$$\delta^u(q^u, x) = \delta(q, x)^u, \quad \delta^v(q^v, x) = \delta(q, x)^v \qquad \text{pro každé } q \in Q,\ x \in \Sigma.$$

Nyní zbývá dokázat, že

$$L' = \bigcup_{p \in Q} (L(A^u) \cdot L(A^v)).$$

Příklad 2. Konstrukce regulárního výrazu z konečného automatu (Q, X, δ, q_1, F) příjmající jazyk L, kde $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$: Nejprve označme

- $L_{i,j} = \{w \in X^\star;\ \delta^\star(q_i, w) = q_j\}$ a
- $L_{i,j}^k = \{w \in L_{i,j};$ výpočet $\delta^\star(q_i, w)$ prochází stavy $q_i p_1 \cdots p_l q_j$, kde $p_1, \dots, p_l \in \{q_1, \dots, q_k\}\ \}$, množina všech slov, při kterých automat začne ve stavu q_i, zkončí v q_j a mezitím používá jen prvních k stavů.

Nyní ověřme, že

- $L = \bigcup_{q \in F} L_{q_1, q}$,
- $L_{i,j} = L_{i,j}^n$ a
- $L_{i,j}^{k+1} = L_{i,j}^k \cup L_{i,k+1}^k (L_{k+1,k+1}^k)^\star L_{k+1,j}^k$.

Regulární výraz pro jazyk $L_{i,j}^{k+1}$ sestrojíme z regulárních jazyků pro $L_{i,j}^k$, $L_{i,k+1}^k$, $(L_{k+1,k+1}^k)^\star$ a $L_{k+1,j}^k$ pomocí indukce.

Příklad 3. Navrhněte regulární výrazy reprezentující následující jazyky nad $X = \{a, b\}$.

a) Jazyk sestávající ze slov, které obsahují *aaba* jako podslovo.
b) Jazyk sestávající ze slov, která mají prefix *abb* a sufix *bbaa*.
c) Jazyk sestávající ze slov, kde počet výskytů a je dělitelný 3.
d) Jazyk sestávající ze slov, která začínají a končí stejnou dvojicí symbolů.
e) Jazyk sestávající ze slov, které neobsahují *aa* podslovo.

Příklad 4. Pro následující konečné automaty sestrojte regulární výrazy, které reprezentují stejný jazyk.

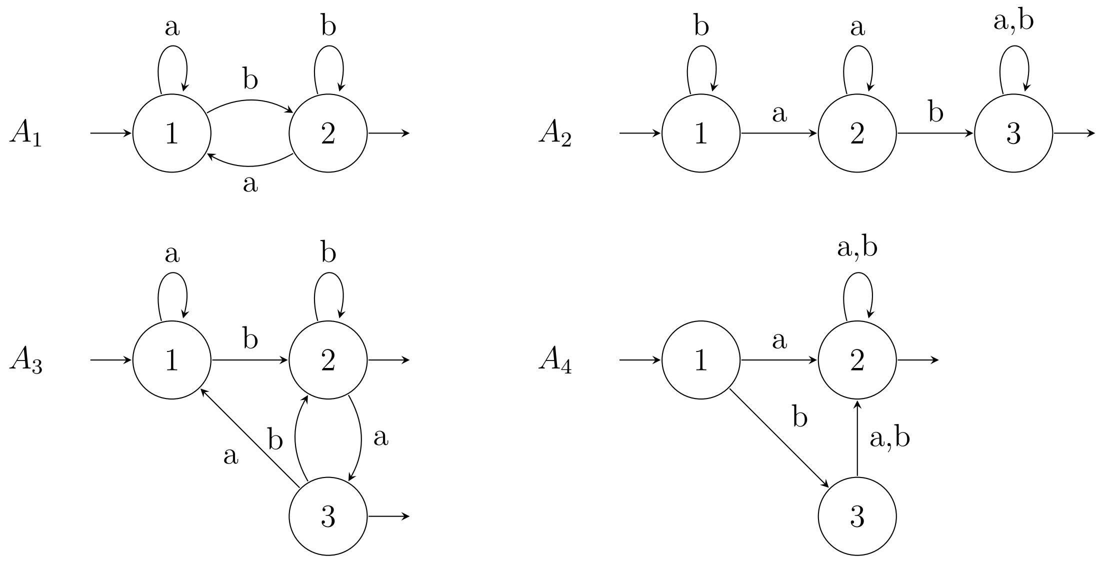
Příklad 5 (Domácí úkol)**.** K automatu A_4 sestrojte regulární výrazy, které reprezentují stejný jazyk. Zdůvodněte správnost.

Příklad 6. Pro každé přirozené n najděte jazyk L_n rozpoznatelný n stavovým nedeterministickým automatem a 2^n stavovým redukovaným deterministickým automatem.

Příklad 7. Proč konečné automaty smí vstup přečíst jen jednou? Jesliže konečnému automatu dovolíme opakovaně číst vstup, bude mít větší výpočetní sílu (t.j. rozpoznávat některé neregulární jazyky)? Kdy přesně dvousměrný automat zkončí? Jak poznat, jestli se dvousměrný automat může zacyklit?

Definice 1. Dvousměrné deterministický konečný automat je pětice (Q, A, δ, q_0, F), kde

- Q je konečná množina stavů
- X je abeceda
- $\delta : Q \times X \to Q \times \{-1, 0, 1\}$ je přechodová funkce
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $F \subseteq Q$ je množina příjmajících stavů



V přechodové funkci „-1“ značí přechod na předcházející buňku vstupu, „0“ čtení stejného vstupu, „1“ přechod na následující pozici vstupu.

Příklad 8. Nechť L je regulární jazyk. Rozhodněte, zda jsou následující jazyky regulární.

- $L_1 = \{w;\ \#w@ \in L\}$
- $L_2 = \{\#w@;\ ww^R \in L\}$
- $L_3 = \{\#w@;\ \exists v \in X^\star :\ wv \in L,\ |v| = |w|\}$