Definice 1. Gramatika je čtveřice (V_N, V_T, S, P), kde

- V_N je konečná neprázdná množina neterminálních symbolů,
- V_T je konečná neprázdná množina terminálních symbolů (písmena abecedy),
- $S \in V_N$ je počáteční neterminál a
- P je konečná množina přepisovacích pravidel tvaru $u \to v$, kde $u, v \in (V_N \cup V_T)^\star$ a u obsahuje alespoň jeden neterminál.

Definice 2. Chomského hierarchie

Rekurzivně spočetné jazyky (typu 0, $\mathcal{L}_0$): Žádné omezení přepisovacích pravidel.

Kontextové jazyky (typu 1, $\mathcal{L}_1$): Pravidla typu $aXb \to awb$, kde $a, b, w \in (V_N \cup V_T)^\star$, $X \in V_N$, $w \neq \lambda$, nebo speciální pravidlo $S \to \lambda$ není-li S na pravé straně žádného pravidla.

Bezkontextové jazyky (typu 2, $\mathcal{L}_2$): Pravidla typu $X \to a$, kde $a \in (V_N \cup V_T)^\star$ a $X \in V_N$.

Regulární jazyky (typu 3, $\mathcal{L}_3$): Pravidla typu $X \to wY$ nebo $X \to w$, kde $X, Y \in V_N$ a $w \in V_T^\star$.

Příklad 1. Navrhněte gramatiky, které generují následující jazyky. Lze gramatiku zkonstruovat ve všech případech?

a) $L = \{ww;\ w \in \{a,b\}^\star\}$
b) $L = \{ww;\ w \in \{a\}^\star\}$
c) $L = \{a^i b^i;\ i \in \mathbb{N}_0\}$
d) $L = \{a^i b^j;\ i, j \in \mathbb{N}_0\}$
e) $L = \{a^i a^i b^j;\ i, j \in \mathbb{N}_0\}$
f) $L = \{a^i b^j a^i;\ i, j \in \mathbb{N}_0\}$
g) $L = \{a^i b^i a^j;\ i, j \in \mathbb{N}_0\}$
h) $L = \left\{a^i b^j a^k;\ i, j, k \in \mathbb{N}_0\right\}$
i) $L = \{a^i b^i c^i;\ i \in \mathbb{N}_0\}$
j) $L = \left\{a^i b^j a^k;\ i, j, k \in \mathbb{N}_0, i \leq j \leq k\right\}$
k) $L = \left\{ww^R;\ w \in \{a,b\}^\star\right\}$
l) $L = \{a^{2i};\ i \in \mathbb{N}_0\}$
m) $L = \left\{a^{2^i};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
n) $L = \left\{a^{i^2};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
o) $L = \left\{a^{i^2+i+1};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
p) $L = \{a^{3i};\ i \in \mathbb{N}_0\}$
q) $L = \left\{a^{3^i};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
r) $L = \left\{a^{i^3};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
s) $L = \{a^p;\ p \text{ je prvočíslo}\}$
t) $L = \{a^{p+q};\ p, q \text{ jsou různá prvočísla}\}$

Příklad 2. Navrhněte gramatiku, která generuje jazyk obsahující všechny

- regulární výrazy
- aritmetické výrazy (složených z čísel, sčítání, odčítání, násobení, dělení a závorek)
- výrazy výrokové (predikátové) logiky
- XML/HTML
- ...

Definice 3. Bezkontextová gramatika je nevypouštějící, jestliže neobsahuje pravidla tvaru $X \to \lambda$ pro $X \in V_N$.

Věta 4. Ke každé bezkontextové gramatice G existuje nevypoštějící bezkontextová gramatika G' taková, že $L(G') = L(G) \setminus \{\lambda\}$.

Postup

- $\Pi = \{X \in V_N;\ X \Rightarrow_G \lambda\}$
- Pro pravidlo $Y \to w_1 X_1 w_2 X_2 \dots w_n X_n w_{n+1}$ z G, kde $X_i \in \Pi$ a w_i neobsahují Π, přidáme do G' pravidla vzniklá vynecháním libovolné podmnožiny $\{X_1, \dots, X_n\}$.

Příklad 3. Jsou následující gramatiky kontextové? Jsou generované jazyky kontextové? Pokud ano, nalezněte ekvivalentní kontextovou gramatiku.

a)
- $S \to ABCD$
- $A \to a \mid \lambda$
- $B \to b \mid \lambda$
- $C \to c \mid \lambda$
- $D \to d \mid \lambda$

b)
- $S \to aSbA \mid \lambda$
- $A \to aBbA \mid bCB \mid CD$
- $B \to bbBa \mid aS$
- $C \to aAaA \mid \lambda$
- $D \to SC \mid aABb$

Příklad 4 (Domácí úkol)**.** Navrhněte gramatiku, která generuje jazyk $L = \left\{a^{i^2};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$.