Definice 1. Chomského hierarchie
Rekurzivně spočetné jazyky (typu 0, $\mathcal{L}_0$): Žádné omezení přepisovacích pravidel.
Kontextové jazyky (typu 1, $\mathcal{L}_1$): Pravidla typu $aXb \to awb$, kde $a, b, w \in (V_N \cup V_T)^\star$, $X \in V_N$, $w \neq \lambda$, nebo speciální pravidlo $S \to \lambda$ není-li S na pravé straně žádného pravidla.
Bezkontextové jazyky (typu 2, $\mathcal{L}_2$): Pravidla typu $X \to a$, kde $a \in (V_N \cup V_T)^\star$ a $X \in V_N$.
Regulární jazyky (typu 3, $\mathcal{L}_3$): Pravidla typu $X \to wY$ nebo $X \to w$, kde $X, Y \in V_N$ a $w \in V_T^\star$.

Definice 2. Bezkontextová gramatika G ($L(G) \neq \emptyset$) se nazývá redukovaná, jestliže
a) každý neterminál X je ukončitelný, tj. $X \Rightarrow_G^\star w$ pro nějaké terminálové slovo w a
b) každý neterminál X (kromě počátečního S) je dosažitelný, tj. $S \Rightarrow_G^\star uXv$ pro nějaká slova u a v z terminálů a neterminálů.

Příklad 1. Zredukujte následující gramatiky.
a) $S \to aSb|aAbb|\lambda$
$A \to ABa|Bb$
$B \to aAb|BB$
$C \to CC|cS$
b) $S \to aA|bB|aSa|bSb|\lambda$
$A \to bCD|Dba$
$B \to bB|AC$
$C \to aA|AC$
$D \to DE$
$E \to \lambda$

Definice 3. Bezkontextová gramatika je v Chomského normálním tvaru, jestliže pravidla mají tvar
- $X \to AB$, kde X, A, B jsou neterminály nebo
- $X \to a$, kde X je neterminál a a je terminál.

Převod bezkontextové gramatiky do Chomského normálním tvaru:
a) Eliminace pravidel $X \to Y$
b) Eliminace pravidel $X \to \lambda$
c) Pro každý terminál a přidáme neterminál X_a, pravidlo $X_a \to a$ a ve všech ostatních pravidlech nahradíme a za X_a
d) Pravidla $X \to X_1 \cdots X_n$ s $n > 2$ neterminály rozdělíme na $X \to X_1X'$ a $X' \to X_2 \cdots X_n$, kde X' je nový neterminál, a na poslední pravidlo aplikujeme indukci.

Definice 4. Bezkontextová gramatika je v Greibachové normální formě, jestliže každé pravidlo je tvaru $X \to aX_1 \cdots X_n$, kde X, $X_1, \ldots, X_n$ jsou neterminály a a je terminál.

Převod bezkontextové gramatiky do Greibachové normální formy:
a) Eliminace pravidel $X \to \lambda$
b) Eliminace přímé levé rekurze, tj. pravidel tvaru $X \to Xu$, kde X je neterminál a u je slovo z terminálů a neterminálů:
   - Nechť $X \to Xu_1|\cdots|Xu_n$ jsou všechna levě rekurzivní pravidla, kde $u_1, \ldots, u_n$ jsou slova z terminálů a neterminálů a
   - nechť $X \to v_1|\cdots|v_k$ jsou ostatní pravidla, pak
   - přidáme neterminál Z a původní pravidla pro X nahradíme
   - pravidly $X \to v_1Z|\cdots|v_kZ$ a
   - $Z \to u_1Z|\cdots|u_nZ|u_1|\cdots|u_n$
c) Očíslujme všechny neterminály $S = X_1, X_2, \ldots, X_n$
d) Eliminujeme všechna pravidla typu $X_i \to X_ju$, kde $j < i$, tj. pravidla, jejichž pravá strana začíná neterminálem s menším indexem než je index neterminálu na levé straně

- Nechť $X_j \to w_1|\cdots|w_m$ jsou všechna pravidla pro X_j, pak
- pravidlo $X_i \to X_j u$ nahradíme pravidly $X_i \to w_1 u|\cdots|w_m u$.
- Tuto eliminaci provádíme iterativně pro i od 1 do n.

e) Eliminujeme všechna pravidla typu $X_i \to X_j u$, kde $j > i$
- Nechť $X_j \to w_1|\cdots|w_m$ jsou všechna pravidla pro X_j, pak
- pravidlo $X_i \to X_j u$ nahradíme pravidly $X_i \to w_1 u|\cdots|w_m u$.
- Tuto eliminaci provádíme iterativně pro i od n do 1.

Příklad 2. Následující bezkontextovou gramatiku převeďte do Chomského a Greibachové normální formy. Pokuste se sestrojit LL(1) analyzátor pro jazyky generované danými gramatikami.

a) $S \to A|0SA|\lambda$
$A \to 1A|1|B1$
$B \to 0B|0|\lambda$

b) $S \to 0A10B10$
$A \to 1A0|\lambda$
$B \to 1B00|\lambda$

c) $S \to (E)$
$E \to F + F|F * F$
$F \to S|1$

Věta 5 (Bezkontextové pumping lemma)**.** Je-li L bezkontextový jazyk nad abecedou X, pak existují $n, m \in \mathbb{N}$ takové, že každé slovo z L délky alespoň n lze rozdělit na pět částí $uvwxy$ tak, že
- délka vwx je nejvýše m,
- slovo vx je neprázdné a
- slovo uv^iwx^iy je z jazyka L pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$.

Příklad 3. Rozhodněte, které z následujích jazyků jsou bezkontextové.

a) $L = \{ww;\ w \in \{a,b\}^\star\}$
b) $L = \{ww;\ w \in \{a\}^\star\}$
c) $L = \{a^ib^i;\ i \in \mathbb{N}_0\}$
d) $L = \{a^ib^j;\ i,j \in \mathbb{N}_0\}$
e) $L = \{a^ia^ib^j;\ i,j \in \mathbb{N}_0\}$
f) $L = \{a^ib^ja^i;\ i,j \in \mathbb{N}_0\}$
g) $L = \{a^ib^ia^j;\ i,j \in \mathbb{N}_0\}$
h) $L = \left\{a^ib^ja^k;\ i,j,k \in \mathbb{N}_0\right\}$
i) $L = \{a^ib^ic^i;\ i \in \mathbb{N}_0\}$
j) $L = \left\{a^ib^ja^k;\ i,j,k \in \mathbb{N}_0, i \le j \le k\right\}$
k) $L = \left\{ww^R;\ w \in \{a,b\}^\star\right\}$
l) $L = \{a^{2i};\ i \in \mathbb{N}_0\}$
m) $L = \left\{a^{2^i};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
n) $L = \left\{a^{i^2};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
o) $L = \left\{a^{i^2+i+1};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
p) $L = \{a^{3i};\ i \in \mathbb{N}_0\}$
q) $L = \left\{a^{3^i};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
r) $L = \left\{a^{i^3};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$
s) $L = \{a^p;\ p \text{ je prvočíslo}\}$
t) $L = \{a^{p+q};\ p,q \text{ jsou různá prvočísla}\}$

Příklad 4 (Domácí úkol)**.** Následující bezkontextovou gramatiku převeďte do Chomského a Greibachové normální formy.

a) $S \to 0A10B10$
$A \to 1A0|\lambda$
$B \to 1B00|\lambda$

b) $S \to (E)$
$E \to F + F|F * F$
$F \to S|1$