

Výroková a predikátová logika - cvičení 3

1. Kolik výroků lze sestavit z n prvovýroků? Kolik neekvivalentních výroků lze sestavit z n prvovýroků?
2. Mějme k dispozici $n \geq 2$ prvovýroků a dvě navzájem různá výroková ohodnocení v_1, v_2 .
 - (a) Kolik existuje navzájem neekvivalentních výroků platných ve v_1 ?
 - (b) Kolik existuje navzájem neekvivalentních výroků platných ve v_1 a neplatných ve v_2 ?
 - (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních tautologií platných ve v_1 ?
 - (d) Kolik existuje navzájem neekvivalentních prvovýroků platných ve v_1 ?
3. Mějme k dispozici $n \geq 2$ prvovýroků a formuli φ splněnou právě dvěma různými ohodnoceními v_1, v_2 . Kolik existuje navzájem neekvivalentních formulí ψ takových, že $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie?
4. Zapište/zakreslete vytvořující strom formule $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$.
5. Bud' \mathbb{P} množina prvovýroků. Definujte indukci (dle složitosti formule) funkci $f : VF_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{N}$ takovou, že $f(\varphi)$ je rovno počtu výskytů prvovýroků z \mathbb{P} ve φ . Je možné definovat induktivně funkci přiřazující formuli počet v ní se vyskytujících prvovýroků?
6. Zapište v CNF (resp. DNF) formuli reprezentující následující Booleovskou funkci f :

p	q	r	$f(p, q, r)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

7. Rozhodněte, které z následujících množin spojek jsou univerzální: $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\downarrow\}$, $\{\uparrow\}$ ¹, $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.
8. Převeďte následující formule do CNF a DNF dvěma metodami: určením modelů (tabulkou) a ekvivalentními úpravami (přepisem).
 - (a) $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \vee r)$,
 - (b) $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$,
 - (c) $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$.
9. Pomocí implikačního grafu zjistěte, zda je následující výrok v 2-CNF splnitelný. Pokud ano, nalezněte splňující ohodnocení.

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (s \vee r)$$

10. Bud' $maj_n : {}^3(n^2) \rightarrow {}^n 2$ funkce majoranty po složkách (tedy v každé složce se vybere nejčastěji se vyskytující hodnota). Množina $K \subseteq {}^n 2$ se nazývá mediánová, jestliže je uzavřena na maj_n . Ukažte, že K je mediánová právě tehdy když existuje výrok φ v 2-CNF (v n proměnných) takový, že $M(\varphi) = K$.

¹ \downarrow – Piercova šipka, NOR; \uparrow – Shefferova šipka, NAND