

Výroková a predikátová logika - cvičení 4

1. Zjistěte za použití jednotkové propagace, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_4 \vee p_5)$$

2. Kolik výroků lze sestavit z n prvovýroků? Kolik neekvivalentních výroků lze sestavit z n prvovýroků?

3. Mějme k dispozici $n \geq 2$ prvovýroků a dvě navzájem různá výroková ohodnocení v_1, v_2 .

- (a) Kolik existuje navzájem neekvivalentních výroků platných ve v_1 ?
- (b) Kolik existuje navzájem neekvivalentních výroků platných ve v_1 a neplatných ve v_2 ?
- (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních tautologií platných ve v_1 ?
- (d) Kolik existuje navzájem neekvivalentních prvovýroků platných ve v_1 ?

4. Mějme k dispozici $n \geq 2$ prvovýroků a formuli φ splněnou právě dvěma různými ohodnoceními v_1, v_2 . Kolik existuje navzájem neekvivalentních formulí ψ takových, že $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie?

5. Mějme množinu prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$ a teorii (nad \mathbb{P}) $T = \{r; p \rightarrow q\}$.

- (a) Uveďte příklady výroků takových, že jsou v T pravdivé/ lživé/ nezávislé/ splnitelné/ ekvivalentní.
- (b) Kolik má T modelů?
- (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních formulí pravdivých v T ?
- (d) Lze teorii T axiomatizovat jedním axiomem v DNF?

6. Bud' T teorie $\{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}); i \in \mathbb{N}\}$ nad $\text{var}(T)$.

- (a) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \rightarrow p_j$ pravdivý v T ?
- (b) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \rightarrow (p_j \vee q_j)$ pravdivý v T ?

7. Rozhodněte, zda pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí následující vztahy (případně je „vhodně“ upravte tak, aby platily).

- (a) $T \models \varphi$ nebo $T \models \neg\varphi$.
- (b) $T \models \varphi \wedge \psi$ právě tehdy když $T \models \varphi$ a $T \models \psi$.
- (c) $T \models \varphi \vee \psi$ právě tehdy když $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$.
- (d) Jestliže $T \models \varphi$ a $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie, pak $T \models \psi$.
- (e) Existuje výrok χ takový, že $T \not\models \chi$.

8. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení, případně uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie T a S nad \mathbb{P} platí ($\theta^{\mathbb{P}}(T)$ značí důsledek teorie T):

- (a) $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$,
- (b) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cup S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cup \theta^{\mathbb{P}}(S)$,
- (c) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cap S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \theta^{\mathbb{P}}(S)$.

Proveďte totéž v situaci, kdy množinu důsledků teorie nahradíme množinou modelů teorie.

9. Buď $|\mathbb{P}| = n$, $\varphi \in \mathbf{VF}_{\mathbb{P}}$, $|M(\varphi)| = m$.

- (a) Kolik je neekvivalentních výroků takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$?
- (b) V kolika neekvivalentních (resp. nekviv. kompletních) teoriích nad \mathbb{P} platí φ ?
- (c) Kolik je neekvivalentních teorií T nad \mathbb{P} takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?
- (d) Buď navíc $\{\varphi, \psi\}$ sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků χ takových, že $\varphi \vee \psi \models \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?

10. Formulujte ekvivalenty následujících vlastností/vztahů teorií pomocí vlastností/vztahů množin jejich modelů.

- (a) Teorie je sporná.
- (b) Teorie je kompletní.
- (c) Teorie T je jednoduchou extenzí teorie S .
- (d) Teorie T je konzervativní extenzí teorie S .