Výroková a predikátová logika - cvičení 7

1. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty kde se nebudou tytéž proměnné vyskytovat volně i vázaně zároveň.

   (a) $(\exists x)(\forall y)P(x,z) \vee (y = 0)$

   (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$

   (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

2. Buď φ formule $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které termy jsou substituovatelné do φ za její proměnné?

   (a) Term z za x, term y za x.

   (b) Term z za y, term $2 \star y$ za y.

   (c) Term x za z, term y za z.

3. Mohou nastat následující situace?

   (a) $\mathcal{A} \models x + x = x$

   (b) $\mathcal{A} \models x + x = x[e_1]$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models x + x = x[e_2]$

   (c) $\mathcal{A} \models \forall x(x + x = x)[e_1]$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \forall x(x + x = x)[e_2]$

   (d) $\mathcal{A} \models x + x \neq x + x[e_1]$

   (e) $\mathcal{A} \models \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \forall x \varphi(x)$

   (f) $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi(x)$

   (g) $\mathcal{A} \models \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x)$

   (h) $\mathcal{A} \not\models \varphi$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$, kde φ je sentence

   (i) $\mathcal{A} \models \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y) \wedge \exists x \forall y(f(y) \neq x)$

4. Rozhodněte, zda jsou následující formule (logicky) pravdivé/lživé/nezávislé.

   (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x,y)) \to (\forall y)(\exists x)(P(x,y))$

   (b) $\exists x(x \neq x)$

   (c) $\exists x R(x,x) \wedge \forall y \neg R(y,y)$

   (d) $\forall x P(x) \wedge \exists y \forall x(x \neq y \to \neg P(x))$

5. Lze následující dvojice formulí rozlišit platností v nějaké struktuře?

   (a) $\varphi \to \exists x \psi$, $\exists x(\varphi \to \psi)$

   (b) $\exists x \varphi \to \psi$,$\forall x(\varphi \to \psi)$