Výroková a predikátová logika - průběžný test, 12. 12. 2018
(80 bodů, 80 minut)

1. Formalizujte následující věty formulemi predikátové logiky. Z mimologických symbolů máte k dispozici pouze následující: rovnost, predikát $H(x)$ s významem x byl letos hodný; predikát $D(x, y, z)$ s významem x dostal y od z; konstanta M s významem Mikuláš; predikát $O(x)$ s významem x je ovoce.
   (a) Každý, kdo byl letos hodný, dostal od Mikuláše nějaké ovoce. (3 body)
   (b) Jestliže někdo dostal ovoce sám od sebe, pak je to Mikuláš. (4 body)
2. Je dána množina prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$, teorie T a formule φ nad $\mathbb{P}$. **Pomocí tablo metody** dokažte $T \vdash \varphi$ či na základě bezesporné dokončené větve nalezněte protipříklad (model T, v němž neplatí φ).
   (a) $T = \{(p \wedge q) \rightarrow (r \vee t), r \leftrightarrow t, \neg p \rightarrow p\}$, φ je $q \rightarrow r$. (5 bodů)
   (b) $T = \{(p \vee q) \leftrightarrow (s \vee t)\}$, φ je $(p \wedge q) \rightarrow (s \wedge t)$. (8 bodů)
3. Buď φ formule $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$.
   (a) **Pomocí ekvivelantních úprav** převeďte formuli $\neg\varphi$ do CNF a množinové reprezentace. (4 body)
   (b) **Pomocí rezoluce** dokažte φ. (4 body)
4. Buď $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$ množina prvovýroků.
   (a) Kolik existuje výrokových ohodnocení pro $\mathbb{P}$? (2 body)
   (b) Kolik existuje vzájemně neekvivalentních formulí nad $\mathbb{P}$? (3 body)
   (c) Kolik existuje vzájemně neekvivalentních tautologií nad $\mathbb{P}$? (2 body)
   (d) Je dána formule $\psi = p \vee q$. Kolik existuje vzájemně neekvivalentních formulí φ nad $\mathbb{P}$ takových, že platí $\psi \models \varphi$. (6 bodů)
   (e) Je dána teorie $T = \{p \leftrightarrow q, r \wedge s\}$. Kolik existuje vzájemně neekvivalentních formulí φ nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je sporná? (6 bodů)
5. Je dána teorie $T = \{f(x, y) = f(y, x)\}$ v jazyce s pouze binárním funkčním symbolem f. (Tedy x, y jsou proměnné.) Pro každou z následujících teorií T_1, T_2 rozhodněte, zda je extenzí teorie T. **Pokud ano**, rozhodněte ještě, zda je **konzerativní** extenzí. Vaše odpovědi vždy dostatečně **zdůvodněte**.
   (a) $T_1 = \{f(x, x) = x\}$, ve stejném jazyce jako T, (5 bodů)
   (b) $T_2 = \{\forall u \forall v (f(u, v) = c)\}$, v jazyce obohaceném o konstantní symbol c. (8 bodů)
6. Jazyk $\mathcal{L}$ s rovností obsahuje pouze následující mimologické symboly: unární predikátový symbol P, binární predikátový symbol R, konstantní symboly c, d a unární funkční symbol f. (Tedy x, y jsou proměnné.) **Pomocí tablo metody** rozhodněte, zda teorie T v jazyce $\mathcal{L}$ dokazuje formuli φ. **Pokud ne**, sestrojte na základě bezesporné dokončené větve **kanonický model** jako protipříklad.
   (a) $T = \{\forall x(\exists y R(y, x) \rightarrow x = c), \forall x R(x, d) \wedge P(d)\}$, $\varphi = P(c)$, (8 bodů)
   (b) $T = \{f(x) = c, \exists y(f(y) = x)\}$, $\varphi = \exists x \exists y(\neg x = y)$. (12 bodů)