Výroková a predikátová logika - cvičení 1

1. Relace (binární), ekvivalence, uspořádání.

   (a) Rozhodněte, zda jsou následující binární relace na oboru $\mathbb{Z}$ celých čísel ekvivalence.
   - $R_1(a,b) \Leftrightarrow a \equiv b \pmod 5$,
   - $R_2(a,b) \Leftrightarrow a,b$ jsou nesoudělná,
   - $R_3 = \mathbb{Z}^2$ (tj. $R_3(a,b)$ platí pro libovolná $a,b \in \mathbb{Z}$).

   (b) Rozhodněte, zda binární relace R definována jako $R(a,b) \Leftrightarrow (\exists r)(a + r = b)$ je uspořádání na oboru $\mathbb{Z}$ (resp. na oboru $\mathbb{N}$ přirozených čísel). Pokud ano, je dobré, lineární, husté?

2. Sestrojte formule 1. řádu v jazyce s uspořádáním $\leq$ vyjadřující

   (a) "x je minimální prvek"

   (b) "x je nejmenší prvek"

   (c) "x má bezprostředního následníka".

3. Buď R binární relace na $\mathbb{Z}$, pro níž platí $\exists x \forall y R(x,y)$ (resp. $\forall y \exists x R(x,y)$). Platí $\forall y \exists x R(x,y)$ (resp. $\exists x \forall y R(x,y)$)?

4. Sestrojte formule 2. řádu v jazyce s uspořádáním $\leq$ vyjadřující

   (a) "$\leq$ je dobré uspořádání",

   (b) "x je supremum množiny M"

   (c) "každá neprázdná shora omezená množina má supremum".

5. Mějme konečnou hru dvou (střídajících se) hráčů. Hra končí po n kolech výhrou jednoho ze dvou hráčů označených X, Y, přičemž X začíná. Hra je zadána formulí $\varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ vyjadřující, že ve hře s tahy $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ vyhrává X. Pomocí kvantifikátorů sestrojte formuli vyjadřující

   (a) "X nemůže prohrát", "Y nemůže prohrát",

   (b) "X má vyhrávací strategii",

   (c) "Y má vyhrávací strategii".

6. Sestrojte formule 1. řádu (v jazyce s rovností) vyjadřující pro předem dané $n > 0$

   (a) "existuje alespoň n prvků",

   (b) "existuje nejvýše n prvků",

   (c) "existuje právě n prvků".

   Jakým způsobem lze vyjádřit "existuje nekonečně mnoho prvků"?

7. Stromy.

   (a) Ukažte, že v každém stromě T s vrcholy $x <_T y$ existuje bezprostřední následník (syn) x.

   (b) Nalezněte příklad stromu, v němž nějaký prvek (mimo kořene) nemá bezprostředního předka (otce).

8. Uvažujme úplný binární strom (hloubky ω). Kolik vrcholů úrovně n obsahuje? Kolik vrcholů obsahuje? Kolik větví obsahuje?