

## Výroková a predikátová logika - cvičení 2

1. Uvažujme úplný binární strom (hloubky  $\omega$ ). Kolik vrcholů úrovně  $n$  obsahuje? Kolik vrcholů obsahuje? Kolik větví obsahuje?
2. Zapište v CNF (resp. DNF) formuli reprezentující následující Booleovskou funkci  $f$ :

$p$	$q$	$r$	$f(p, q, r)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

3. Rozhodněte, které z následujících množin spojek jsou univerzální:  $\{\wedge, \vee, \neg\}$ ,  $\{\downarrow\}$ ,  $\{\uparrow\}$ <sup>1</sup>,  $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow\}$ .
4. Převeďte následující formule do CNF a DNF dvěma metodami: určením modelů (tabulkou) a ekvivalentními úpravami (přepisem).
  - (a)  $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \vee r)$ ,
  - (b)  $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$ ,
  - (c)  $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$ .
5. Pomocí implikačního grafu zjistěte, zda je následující výrok v 2-CNF splnitelný. Pokud ano, nalezněte splňující ohodnocení.

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (s \vee r)$$

6. Zjistěte za použití jednotkové propagace, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_4 \vee p_5)$$

7. Bud'  $major_n : {}^3({}^n 2) \rightarrow {}^n 2$  funkce majoranty po složkách. Množina  $K \subseteq {}^n 2$  se nazývá mediánová, jestliže je uzavřena na  $major_n$ . Ukažte, že  $K$  je mediánová právě tehdy když existuje výrok  $\varphi$  v 2-CNF (v  $n$  proměnných) takový, že  $M(\varphi) = K$ .
8. Mějme množinu prvovýroků  $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$  a teorii (nad  $\mathbb{P}$ )  $T = \{r; p \rightarrow q\}$ .
  - (a) Uveďte příklady výroků takových, že jsou v  $T$  pravdivé/ lživé/ nezávislé/ splnitelné/ ekvivalentní.
  - (b) Kolik má  $T$  modelů?
  - (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních formulí pravdivých v  $T$ ?
  - (d) Lze teorii  $T$  axiomatizovat jedním axiomem v DNF?

---

<sup>1</sup>↑ – Piercova šipka, NOR; ↓ – Shefferova šipka, NAND

9. Buď  $T$  teorie  $\{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}); i \in \mathbb{N}\}$  nad  $\text{var}(T)$ .
- (a) Pro která  $i, j \in \mathbb{N}$  je výrok tvaru  $p_i \rightarrow p_j$  pravdivý v  $T$ ?
  - (b) Pro která  $i, j \in \mathbb{N}$  je výrok tvaru  $p_i \rightarrow (p_j \vee q_j)$  pravdivý v  $T$ ?
10. Rozhodněte, zda pro každou teorii  $T$  a výroky  $\varphi, \psi$  platí následující vztahy (případně je upravte tak, aby platily).
- (a)  $T \models \varphi$  nebo  $T \models \neg\varphi$ .
  - (b)  $T \models \varphi \wedge \psi$  právě tehdy když  $T \models \varphi$  a  $T \models \psi$ .
  - (c)  $T \models \varphi \vee \psi$  právě tehdy když  $T \models \varphi$  nebo  $T \models \psi$ .
  - (d) Jestliže  $T \models \varphi$  a  $\varphi \rightarrow \psi$  je tautologie, pak  $T \models \psi$ .
  - (e) Existuje výrok  $\chi$  takový, že  $T \not\models \chi$ .