Výroková a predikátová logika - cvičení 3

1. Zjistěte za použití jednotkové propagace, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_4 \vee p_5)$$

2. Buď $maj_n : {}^3({}^n2) \longrightarrow {}^n2$ funkce majoranty po složkách. Množina $K \subseteq {}^n2$ se nazývá mediánová, jestliže je uzavřena na maj_n. Ukažte, že K je mediánová právě tehdy když existuje výrok φ v 2-CNF (v n proměnných) takový, že $M(\varphi) = K$.

3. Mějme množinu prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$ a teorii (nad $\mathbb{P}$) $T = \{r; p \to q\}$.

   (a) Uveďte příklady výroků takových, že jsou v T pravdivé/ lživé/ nezávislé/ splnitelné/ ekvivalentní.

   (b) Kolik má T modelů?

   (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních formulí pravdivých v T?

   (d) Lze teorii T axiomatizovat jedním axiomem v DNF?

4. Buď T teorie $\{p_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}); i \in \mathbb{N}\}$ nad $var(T)$.

   (a) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \to p_j$ pravdivý v T?

   (b) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \to (p_j \vee q_j)$ pravdivý v T?

5. Rozhodněte, zda pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí následující vztahy (případně je upravte tak, aby platily).

   (a) $T \models \varphi$ nebo $T \models \neg\varphi$.

   (b) $T \models \varphi \wedge \psi$ právě tehdy když $T \models \varphi$ a $T \models \psi$.

   (c) $T \models \varphi \vee \psi$ právě tehdy když $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$.

   (d) Jestliže $T \models \varphi$ a $\varphi \to \psi$ je tautologie, pak $T \models \psi$.

   (e) Existuje výrok χ takový, že $T \not\models \chi$.

6. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení, případně uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie T a S nad $\mathbb{P}$ platí:

   (a) $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$,

   (b) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cup S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cup \theta^{\mathbb{P}}(S)$,

   (c) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cap S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \theta^{\mathbb{P}}(S)$.

7. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky.

   (a) $p \to (q \to p)$,

   (b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$,

   (c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,

   (d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$,

   (e) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

8. Pomocí tablo metody nalezněte všechny modely následujících teorií.

   (a) $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$,
   (b) $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q); \neg p \rightarrow q; r \rightarrow q\}$,
   (c) $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$.

9. Pomocí tablo metody dokažte či nalezněte protipříklad.

   (a) $\{\neg q; p \vee q\} \models p$,
   (b) $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$,
   (c) $\{p \rightarrow r; p \vee q; \neg s \rightarrow \neg q\} \models (r \rightarrow s)$.