

## Výroková a predikátová logika - cvičení 4

1. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení, případně uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie  $T$  a  $S$  nad  $\mathbb{P}$  platí:

- (a)  $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$ ,
- (b)  $\theta^{\mathbb{P}}(T \cup S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cup \theta^{\mathbb{P}}(S)$ ,
- (c)  $\theta^{\mathbb{P}}(T \cap S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \theta^{\mathbb{P}}(S)$ .

2. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky.

- (a)  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ ,
- (b)  $p \leftrightarrow \neg\neg p$ ,
- (c)  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ ,
- (d)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ ,
- (e)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ .

3. Pomocí tablo metody nalezněte všechny modely následujících teorií.

- (a)  $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$ ,
- (b)  $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q); \neg p \rightarrow q; r \rightarrow q\}$ ,
- (c)  $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ .

4. Pomocí tablo metody dokažte či nalezněte protipříklad.

- (a)  $\{\neg q; p \vee q\} \models p$ ,
- (b)  $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$ ,
- (c)  $\{p \rightarrow r; p \vee q; \neg s \rightarrow \neg q\} \models (r \rightarrow s)$ .

5. Bud'  $|\mathbb{P}| = n$ ,  $\varphi \in \mathbf{VF}_{\mathbb{P}}$ ,  $|M(\varphi)| = m$ .

- (a) Kolik je neekvivalentních výroků takových, že  $\varphi \models \psi$  nebo  $\psi \models \varphi$ ?
- (b) V kolika neekvivalentních (resp. nekviv. kompletních) teoriích nad  $\mathbb{P}$  platí  $\varphi$ ?
- (c) Kolik je neekvivalentních teorií  $T$  nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $T \cup \{\varphi\}$  je bezesporná?
- (d) Bud' navíc  $\{\varphi, \psi\}$  sporná a  $|M(\psi)| = p$ . Kolik je neekvivalentních výroků  $\chi$  takových, že  $\varphi \vee \psi \models \chi$ ? V kolika neekvivalentních teoriích platí  $\varphi \vee \psi$ ?

6. Sestrojte atomická tabla pro Piercovu spojku  $\downarrow$  (NOR) a Shefferovu spojku  $\uparrow$  (NAND).

7. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. pro každou teorii  $T$  a fle  $\varphi, \psi$

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě tehdy když } T, \varphi \vdash \psi.$$

8. Ukažte, že každé atomické tablo  $\tau$  je korektní, tj. shoduje-li se ohodnocení  $v$  s položkou v kořeni  $\tau$ , shoduje se i s nějakou větví v  $\tau$ .

9. Bud'  $\mathcal{S}$  spočetný systém (množina) neprázdných konečných množin. Řekneme, že  $\mathcal{S}$  má *prostý selektor*, jestliže existuje prostá funkce  $f : \mathcal{S} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$  taková, že  $f(S) \in S$  pro každé  $S \in \mathcal{S}$ . Dokažte, že  $\mathcal{S}$  má prostý selektor, právě tehdy když každá neprázdná konečná podmnožina  $\mathcal{S}$  má prostý selektor.