

## Výroková a predikátová logika - cvičení 5

1. Buď  $|\mathbb{P}| = n$ ,  $\varphi \in \mathbf{VF}_{\mathbb{P}}$ ,  $|M(\varphi)| = m$ .
  - (a) Kolik je neekvivalentních výroků takových, že  $\varphi \models \psi$  nebo  $\psi \models \varphi$ ?
  - (b) V kolika neekvivalentních (resp. nekviv. kompletních) teoriích nad  $\mathbb{P}$  platí  $\varphi$ ?
  - (c) Kolik je neekvivalentních teorií  $T$  nad  $\mathbb{P}$  takových, že  $T \cup \{\varphi\}$  je bezesporná?
  - (d) Buď navíc  $\{\varphi, \psi\}$  sporná a  $|M(\psi)| = p$ . Kolik je neekvivalentních výroků  $\chi$  takových, že  $\varphi \vee \psi \models \chi$ ? V kolika neekvivalentních teoriích platí  $\varphi \vee \psi$ ?

2. Sestrojte atomická tabla pro Piercovu spojku  $\downarrow$  (NOR) a Shefferovu spojku  $\uparrow$  (NAND).

3. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. pro každou teorii  $T$  a fle  $\varphi, \psi$

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě tehdy když } T, \varphi \vdash \psi.$$

4. Ukažte, že každé atomické tablo  $\tau$  je korektní, tj. shoduje-li se ohodnocení  $v$  s položkou v kořeni  $\tau$ , shoduje se i s nějakou větví v  $\tau$ .
5. Buď  $\mathcal{S}$  spočetný systém (množina) neprázdných konečných množin. Řekneme, že  $\mathcal{S}$  má *prostý selektor*, jestliže existuje prostá funkce  $f : \mathcal{S} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$  taková, že  $f(S) \in S$  pro každé  $S \in \mathcal{S}$ . Dokažte, že  $\mathcal{S}$  má prostý selektor, právě tehdy když každá neprázdna konečná podmnožina  $\mathcal{S}$  má prostý selektor.

6. Buď  $\varphi$  výrok  $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ .

- (a) Sestrojte tablo důkaz výroku  $\varphi$
- (b) Převeďte  $\neg\varphi$  do CNF a množinové reprezentace.
- (c) Nalezněte rezoluční vyvrácení  $\neg\varphi$ , tj. důkaz  $\varphi$ .

7. Nalezněte rezoluční uzávěr  $\mathcal{R}(S)$  pro následující formuli  $S$ . Je formule  $S$  splnitelná?

- (a)  $\{\{p, q\}\{\neg p, \neg q\}\{\neg p, q\}\}$ ,
- (b)  $\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}$ ,
- (c)  $\{\{p, \neg q, r\}\{q, r\}\{\neg p, r\}\{q, \neg r\}\{\neg q\}\}$ .

8. Vyvráťte rezolucí následující výroky.

- (a)  $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$ ,
- (b)  $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$

9. Dokažte rezolucí, že v teorii  $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$  platí  $s$ , tj. ukažte  $T \vdash s$ .

10. Ukažte, že je-li  $S = \{C_1, C_2\}$  splnitelná a  $C$  je rezolventa  $C_1, C_2$ , pak i  $C$  je splnitelná.

11. Sestrojte *srom dosazení* pro formuli  $S = \{\{p, r\}\{q, \neg r\}\{\neg q\}\{\neg p, t\}\{\neg s\}\{s, \neg t\}\}$ . Je  $S$  splnitelná?