Výroková a predikátová logika - test 2, var. A, 6. 1. 2015

(12+2 body)

Pracujeme vždy v jazyce s rovností.

1. T je teorie, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou sentence v jazyce teorie T. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Zdůvodněte. (2b)

   Jestliže T je bezesporná a $T \vdash \varphi_1, \ldots, T \vdash \varphi_n$, pak $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ je bezesporná.

2. Mějme v jazyce ternární predikátový symbol NSD a binární predikátový symbol $|$. Buď $T = \{NSD(x, y, z) \to (z \mid x \wedge z \mid y); (NSD(x, y, z) \wedge (w \mid x \wedge w \mid y)) \to w \mid z\}$. Pomocí tablo metody dokaže $T \vdash (NSD(x, y, z_1) \wedge NSD(x, y, z_2)) \to z_1 \mid z_2$. (2b)

3. Buď $\heartsuit$ binární predikátový symbol. Pro následující formuli najděte příklady struktur, v nichž formule a)platí, b)neplatí. (2b)

   $$(\forall x)(\exists y)(x \heartsuit y \wedge \neg y \heartsuit x) \to (\exists z)(\forall y)(y \heartsuit z)$$

4. Buďte P, Q unární predikátové symboly. Pomocí tablo metody dokažte následující formuli. (2b)

   $$((\exists x)P(x) \to Q(y)) \to (\forall x)(P(x) \to Q(y))$$

5. Mějme v jazyce pouze dva konstantní symboly c, d. Buď $\mathcal{A}$ struktura s univerzem $A = \{0, 1, 2, 3\}$ a $c^A = 0$, $d^A = 1$.

   (a) Vypište univerza všech podstruktur struktury $\mathcal{A}$. (1b)

   (b) Existují dvě různé elementárně ekvivalentní podstruktury struktury $\mathcal{A}$? Pokud ano, udejte je. Pokud ne, zdůvodněte. (1b)

6. Mějme v jazyce binární predikátový symbol P. Pro následující formuli najděte takovou její variantu, v níž nemá žádná proměnná zároveň vázaný i volný výskyt. (1b)

   $$(\forall x)P(x, y) \to (\exists y)P(x, y)$$

7. Mějme v jazyce binární predikátový symbol $<$ a unární funkční symbol f. Pro následující formuli rozhodněte, zda je term $f(z)$ substituovatelný za proměnnou x. Pokud ano, zapište výsledek takové substituce. Pokud ne, zdůvodněte. (1b)

   $$(\exists y)((\forall x)(\exists z)(x < z) \wedge x < y)$$

Bonusová otázka: Existuje kompletní otevřeně axiomatizovatelná teorie? Pokud ano, zadejte její otevřenou axiomatiku. Pokud ne, zdůvodněte. (2b)