Výroková a predikátová logika - test 2, var. B, 7. 1. 2015
(12+2 body)

Pracujeme vždy v jazyce s rovností.

1. T je teorie, φ, ψ jsou sentence v jazyce teorie T. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Zdůvodněte. (2b)

   Jestliže T je bezesporná a $T \vdash \varphi \vee \psi$, pak $T \cup \{\varphi\}$ nebo $T \cup \{\psi\}$ je bezesporná.

2. Mějme v jazyce unární predikátový symbol $Prime$, binární funkční symbol $\cdot$ a konstantní symbol 1. Buď $T = \{Prime(z) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(z = x \cdot y \rightarrow ((x = 1 \vee y = 1) \wedge \neg x = y)); 1 = 1 \cdot 1\}$. Pomocí tablo metody dokaže $T \vdash \neg Prime(1)$. (2b)

3. Buď $\heartsuit$ binární predikátový symbol. Pro následující formuli najděte příklady struktur, v nichž formule a)platí, b)neplatí. (2b)

   $$(\exists x)((\forall y)(\neg x = y \rightarrow x \heartsuit y) \wedge \neg(\exists y)(x \heartsuit y))$$

4. Buďte P, Q unární predikátové symboly. Pomocí tablo metody dokažte následující formuli. (2b)

   $$((\forall x)P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (\exists x)(P(x) \rightarrow Q(y))$$

5. Mějme v jazyce (s rovností) pouze unární funkční symbol f. Buď $\mathcal{A}$ struktura s univerzem $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $f^A = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$.

   (a) Vypište univerza všech podstruktur struktury $\mathcal{A}$. (1b)

   (b) Existují dvě podstruktury struktury $\mathcal{A}$, jejichž univerza mají stejný počet prvků, ale které **nejsou** elementárně ekvivalentní? Pokud ano, udejte je a zapište sentenci platnou v jedné a neplatnou v druhé z těchto podstruktur. Pokud ne, zdůvodněte. (1b)

6. Mějme v jazyce binární predikátový symbol P. Pro následující formuli najděte takovou její variantu, v níž nemá žádná proměnná zároveň vázaný i volný výskyt. (1b)

   $$(\exists y)(P(x, z) \wedge (\forall z)(\exists x)(P(x, z) \rightarrow P(z, y)))$$

7. Mějme v jazyce binární predikátový symbol $<$ a unární funkční symbol f. Pro následující formuli rozhodněte, zda je term $f(z)$ substituovatelný za proměnnou x. Pokud ano, zapište výsledek takové substituce. Pokud ne, zdůvodněte. (1b)

   $$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(x < z \rightarrow y < z)$$

   Bonusová otázka: Existuje struktura s desetiprvkovým univerzem, která má právě deset podstruktur? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte. (2b)