Historicko-filosofický úvod

Jana Glivická

KTIML MFF UK

4. 10. 2014

Svět matematiky (dnes)

- Všechno je množina.
- Svět množin popsán axiomatickým systémem.
- Axiomy - formule predikátové logiky prvního řádu.

Antická geometrie

Euklidovy axiomy (3. stol. př. n. l.):
(...)
4. Co se vzájemně kryje, rovno jest.
5. Celek je větší než část.

Euklidovy postuláty - potenciální nekonečno

aktuální nekonečno
Bernad Bolzano (1851)
- teologický argument!

paradoxy nekonečna

- ve sporu s Eukleidovými axiomy
- nutná nová „intuice“ pro práci nekonečnými s množstvími

naivní teorie množin - Georg Cantor (1874)
Je možné vzájemně jednoznačně zobrazit množinu přirozených čísel na množinu reálných čísel?
- není, diagonální argument

Důsledek: Množina všech transcendentálních reálných čísel je nespočetná, zatímco množina všech reálných algebraických čísel je spočetná.

paradoxy naivní teorie množin

- Cantorův paradox
- Russeův paradox (1901)

Řešení paradoxů (současný přístup):

- Ne každé vlastnosti odpovídá množina (prvků s danou vlastností).
- třída vs. množina (každá množina je třída, ne naopak: vlastní třída)
- axiomatická metoda

Russelův paradox a krize základů

opět nespolehlivost intuice $\Rightarrow$ potřeba nových základů

- intuicionismus: Brouwer
  - matematické objekty „existují jen v lidské mysli“
  - konstruktivismus – objekt musí být zkonstruován, nejen odvozen spor z jeho neexistence
- formalismus: David Hilbert

Hilbertův program - požadavky

- formalizace
- úplnost
- bezespornost
- rozhodnutelnost

Gödelovy věty o neúplnosti (1931)
$\Rightarrow$ Hilbertův program není realizovatelný

První Gödelova věta: Algoritmicky zadaná teorie obsahující (dostatečně silnou) aritmetiku přirozených čísel není úplná.
Druhá Gödelova věta: Algoritmicky zadaná teorie obsahující (dostatečně silnou) aritmetiku přirozených čísel nedokazuje svou bezespornost.

Jakákoli rozumná axiomatická teorie množin bude neúplná, nerozhodnutelná, nedokazující svou bezespornost.

pozůstatky Hilbertova programu a současný stav:

- formalizace
- axiomatické teorie – teorie množin není úplná, ale je „dostatečně silná“
- teorie množin nedokáže svoji bezespornost, ale dosud se žádný spor neobjevil (věříme, že se neobjeví)
- predikátová logika prvního řádu - precizace pojmů: teorie, tvrzení, důkaz, pravdivost, model...
- teorie rekurze - precizace pojmů: algoritmus, rozhodnutelnost; Turingův stroj

Světem matematiky je teorie množin, jazykem matematiky je predikátová logika prvního řádu.

Axiomatická teorie množin

- NBG/GB: von Neumann-Bernays-Gödel/Gödel-Bernays
- KM: Kelley-Morse
- ZF: Zermelo-Fraenkel

ZF: Zermelo-Fraenkel
ZFC: ZF + axiom výběru (AC)

Hypotéza kontinua (CH): Množina reálných čísel musí mít jednu z následujících mohutností (velikostí):

- konečná
- stejná jako mohutnost všech přirozených čísel
- stejná jako mohutnost všech reálných čísel.

Přirozená otázka o množině reálných čísel, přesto v ZFC je nezávislá.

- 1940, Gödel: Hypotéza kontinua může platit, tj. ZFC + CH je bezesporná.
- 1963, Cohen: Hypotéza kontinua může neplatit, tj. ZFC + ($\neg$CH) je bezesporná.

logika

- syntax
    - „jak mluvíme“
    - pojmy: formule, teorie, důkaz, (logický) kalkulus...
    - založeno na práci s konečnými posloupnostmi symbolů
- sémantika
    - „o čem mluvíme“
    - pojmy: ohodnocení, model, pravdivost...
    - pracujeme s množinami

Vztah mezi syntaxí a sémantikou popisují věty o korektnosti a úplnosti.

Jak „bezpečně“ vybudovat logiku a teorii množin:

- Vybudujeme logickou syntax – pravidla pro práci s konečnými posloupnosti.
- Axiomatizujeme teorii množin – stále jsme jen na straně syntaxe.
- Na základě teorie množin vybudujeme logickou sémantiku.

Skolemův paradox:

- Z Löwenheim-Skolemovy věty plyne, že existuje spočetný model M teorie množin (ZFC).
- ZFC dokazuje, že existuje nespočetná množina. Tedy model M obsahuje nespočetnou množinu.

Jak se může nespočetná množina vejít do spočetného modelu?

Řešení „paradoxu“: dva světy a dva jazyky

- svět modelu M – jazyk
- „náš svět“ – metajazyk

Berryho paradox

„Nejmenší číslo, které není definovatelné méně než deseti slovy.“