Teorie množin - přednáška 1

11. 11. 2014

Jazyk teorie množin:

$$\mathcal{L} = \{\in\}$$

(pracujeme v logice s rovností, tedy $=$ je v jazyce implicitně)

Volné a vázané proměnné:

- $\varphi(x) \dots (\exists y)(x = 2y)$
- $\varphi(z) \dots (\exists y)(z = 2y)$
- $(\exists y)(y = 2y)$

Axiomy teorie množin ZF:

1. existence
2. extenzionality
3. schéma vydělení
4. dvojice
5. sumy/sjednocení
6. potence
7. schéma nahrazení
8. nekonečna
9. fundovanosti

- axiom existence: $(\exists x)(x = x)$
- axiom extenzionality:$(\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y$ *(platí i $\leftarrow$)*
- schéma vydělení

Můžeme definovat:

- prázdná množina . . . $\emptyset$
- binární průnik . . . $x \cap y$
- rozdíl množin . . . $x - y$

- axiom dvojice: $(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$

Můžeme definovat:

- dvojice množin . . . $\{a, b\}$
- jednoprvková množina . . . $\{a\}$
- uspořádaná dvojice . . . $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Lemma

1. $\{x, y\} = \{u, v\} \leftrightarrow ((x = u \wedge y = v) \vee (x = v \wedge y = u))$
2. $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$

Definice uspořádané k-tice (metamatematickou) indukcí:

$$\langle a_1 \rangle = a_1$$
$$\langle a_1, \dots, a_{k+1} \rangle = \langle \langle a_1, \dots, a_k \rangle, a_{k+1} \rangle$$

Lemma

$\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle b_1, \dots, b_k \rangle \leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_k = b_k)$

Důkaz.

Indukcí podle k. □

- axiom sjednocení:
  $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a))$

Můžeme definovat:

- sjednocení množiny . . . $\bigcup a$
- sjednocení množin . . . $a \cup b$
- k-prvkovou množinu . . . $\{a_1, \ldots, a_k\}$

Definujme nejprve $a \subseteq b$ jako $(\forall u)(u \in a \rightarrow u \in b)$.

- $a \subseteq b$ ... podmnožina
- $a \subset b$ ... vlastní podmnožina

Lemma

1. $(\forall x)(\emptyset \subseteq x)$
2. $(\forall x)(x \subseteq x)$

Pozor: Neplatí $(\forall x)(\emptyset \in x)$.

- axiom potence: $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow x \subseteq a)$

Můžeme definovat:

- potence množiny . . . $\mathcal{P}(a)$

- schéma nahrazení
- axiom nekonečna: $(\exists z)(\emptyset \in z \wedge (\forall x)(x \in z \rightarrow x \cup \{x\} \in z))$

- axiom fundovanosti: $(\forall a)(a \neq \emptyset \rightarrow (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$

Zakazuje:

- $y \in y$
- cykly: $y_1 \in y_2 \in \cdots \in y_k \in y_1$
- nekonečné řetízky: $y_1 \ni y_2 \ni y_3 \ni \cdots$

Axiom výběru (AC)

- nezávislý na axiomech ZF, speciálně: nelze ho v ZF dokázat!
- zatím pracujeme bez něj

Třídy

- Třídový term $\{x; \varphi(x)\}$ označuje *třídu* právě všech *množin*, pro něž platí φ.
- Každá množina je třída.

Třídové proměnné:

- značíme velkými písmeny: $X, Y, Z, \ldots$
- Nelze přes ně kvantifikovat!
- Zápis obsahující třídové proměnné chápeme jako schéma, nikoli jako formuli.

Eliminace třídových termů:

Každou formuli obsahující třídové termy lze ekvivalentně zapsat pomocí základního jazyka.

Příklad: $\{x; \varphi(x)\} = \{y; \psi(y)\} \wedge a \in \{z; \chi(z)\}$ je ekvivalentní $(\forall u)(\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)) \wedge \chi(a)$.

Univerzální třída: $\mathbf{V} = \{x; x = x\}$

Definice

Třída $\{x; \varphi(x)\}$ se nazývá vlastní, jestliže není množinou – tedy jestliže neplatí $(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow \varphi(x))$.

Věta

Univerzální třída je vlastní třídou.

Důkaz.

Russelův paradox. $\square$

Definujeme třídové operace:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A - B$
- $\bigcup A$
- $\bigcap A$
- $\mathcal{P}(A)$

Pozor:

- Výsledné třídy obsahují jako své prvky pouze množiny, vlastní třída nemůže být prvkem žádné třídy.
- Průnikem prázdné množiny je univerzální třída.

Lemma

Třídové operace $\cup, \cap$ *jsou*

- *idempotentní,*
- *komutativní,*
- *asociativní.*

Operace $\cup$ *je distributivní vzhledem k operaci* $\cap$ *a naopak.*

Lemma

De Morganovy zákony.

- $X - (Y_1 \cup Y_2) = (X - Y_1) \cap (X - Y_2)$
- $X - (Y_1 \cap Y_2) = (X - Y_1) \cup (X - Y_2)$

Definice

Kartézský součin tříd A, B je třída
$A \times B = \{\langle a, b \rangle \;\; a \in A \wedge b \in B\}$.

V základním jazyce:
$A \times B = \{x; (\exists a)(\exists b)(x = \langle a, b \rangle) \wedge a \in A \wedge b \in B\}$.

Věta

Kartézským součinem dvou množin je opět množina.

Důkaz.

Položme $z = x \cup y$. Ukážeme

- $x \times y \subseteq z \times z \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(z))$
- Podtřídou množiny nemůže být vlastní třída.

$\square$

Pro libovolnou třídu X definujeme (metamatematickou) indukcí:

$$X^1 = X,$$
$$X^{n+1} = X^n \times X.$$

Tedy X^n je třída všech uspořádaných n-tic z X.

Platí následující:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^1 \supseteq \mathbf{V}^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{V}^n \supseteq \cdots$$