Teorie množin - přednáška 2

18. 11. 2014

Definice

Kartézský součin tříd A, B je třída
$A \times B = \{\langle a, b\rangle \;\; a \in A \wedge b \in B\}$.

V základním jazyce:
$A \times B = \{x; (\exists a)(\exists b)(x = \langle a, b\rangle) \wedge a \in A \wedge b \in B\}$.

Věta

Kartézským součinem dvou množin je opět množina.

Důkaz.

Položme $z = x \cup y$. Ukážeme

- $x \times y \subseteq z \times z \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(z))$
- Podtřídou množiny nemůže být vlastní třída.

$\square$

Příklad

Je $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ vlastní třída?
Pro které třídy A je $\mathbf{V} \times A$ vlastní třída?
Pro které dvojice tříd A, B je $A \times B$ vlastní třída?

Kartézská mocnina:

Pro libovolnou třídu X definujeme (metamatematickou) indukcí:

$$X^1 = X,$$
$$X^{n+1} = X^n \times X.$$

Tedy X^n je třída všech uspořádaných n-tic z X.

Platí následující:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^1 \supseteq \mathbf{V}^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{V}^n \supseteq \cdots$$

Definice

Třída R je n-ární relace jestliže $R \subseteq \boldsymbol{V}^n$.

Definujeme:

$$Dom(R) = \{u; (\exists v)(\langle u, v\rangle \in R)\} \ldots \text{definiční obor}$$

$$Rng(R) = \{v; (\exists u)(\langle u, v\rangle \in R)\} \ldots \text{obor hodnot}$$

Příklad

- *relace* $\in$
- *relace identity*

- Jaké jsou jejich definiční obory a obory hodnot?
- Jakou aritu má definiční obor *n*-ární relace?
- Je definičním oborem/oborem hodnot množiny množina?

Další definované pojmy:

- inverz … $R^{-1} = \{\langle v, u\rangle; \langle u, v\rangle \in R\}$
- obraz … $R[Y] = \{v; (\exists u \in Y)(\langle u, v\rangle \in R)\}$
- vzor … $R^{-1}[Y]$
- restrikce … $R \restriction Y = \{\langle u, v\rangle; \langle u, v\rangle \in R \wedge u \in Y\}$
- skládání … $R \circ S = \{\langle u, v\rangle; \langle u, w\rangle \in R \wedge \langle w, v\rangle \in S\}$

Definice

Třída F je n-ární funkce (zobrazení) jestliže F je $(n+1)$-ární relace a navíc platí pro libovolná u, v, w následující

$$(\langle u, v\rangle \in F \wedge \langle u, w\rangle \in F) \rightarrow v = w.$$

Píšeme $F(u) = v$ místo $\langle u, v\rangle \in F$.

Jestliže $Dom(F) = X$ a $Rng(F) \subseteq Y$, píšeme $F : X \rightarrow Y$.

Vlastnosti funkce $F : X \to Y$:

- prostá (injekce) ... $F(u) = F(u') \to u = u'$
- na (surjekce) ... $Rng(F) = Y$
- bijekce ... prostá a na

Třída všech zobrazení množiny x do třídy Y:

$$ {}^{x}Y = \{f; f : x \to Y\}. $$

Příklad

- ${}^{\emptyset}Y = \{\emptyset\}$
- *Jestliže $x \neq \emptyset$, pak ${}^{x}\emptyset = \emptyset$.*

Lemma

- *Jsou-li x, y množiny, pak i ${}^{x}y$ je množina.*
- *Je-li $x \neq \emptyset$ a Y vlastní třída, pak ${}^{x}Y$ je vlastní třída.*

Indexovaný soubor množin:

Buď F zobrazení, $Dom(F) = J$. Používáme značení

$$\langle F_j; j \in J \rangle$$

případně

$$\langle F_j \rangle_{j \in J}.$$

- Jde jen o jiné značení pro funkci F.
- Třída J se nazývá indexová třída, její prvky indexy.
- F_j značí $F(j)$ pro každý index j.
- Pozor: Každé F_j je množina!

Sjednocení a průnik souboru množin:

$$\bigcup_{j\in J} F_j = \{x; (\exists j \in J)(x \in F_j)\}$$

$$\bigcap_{j\in J} F_j = \{x; (\forall j \in J)(x \in F_j)\}$$

Kartézský součin souboru množin (má smysl jen je-li J množina):

$$\prod_{j\in J} F_j = \{f; f : J \to \bigcup_{j\in J} F_j \wedge (\forall j \in J)(f(j) \in F_j)\}$$

Příklad

Nechť pro soubor $\langle F_j \rangle_{j \in J}$ platí, že $F_j = Y$ pro každé $j \in J$. Pak platí

$$\prod_{j \in J} F_j = {}^J Y.$$

Definujeme následující vlastnosti relace R je na třídě A:

1. (relace R je) reflexivní (na třídě A)
2. antireflexivní
3. symetrická
4. slabě antisymetrická
5. antisymetrická
6. trichotomická
7. tranzitivní

Pozn: Záleží na tom, vzhledem k jaké třídě vlastnosti posuzujeme. Uvedené vlastnosti jsou *dědičné*.

Uspořádání:

Definice

Relace R je (částečné) uspořádání na třídě A, je-li R na A:

- *reflexivní,*
- *slabě antisymetrická,*
- *tranzitivní.*

Příklad

Buď x množina. Je $\subseteq$ uspořádání na $\mathcal{P}(x)$? Kdy je $\in$ uspořádání na x?

Definice

Uspořádání R na třídě A je lineární, je-li R na A trichotomická.

Příklad

Relace R na přirozených číslech (zatím metamatematických):

- $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow y - x \leq 0$,
- $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow x|y$,
- $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow x \perp y$.

Které z nich jsou (lineárním) uspořádáním na přirozených číslech?

Lze uvažovat i *ostré uspořádání*: (antireflexivní), antisymetrické a tranzitivní.

Ostré a (neostré) uspořádání jsou na sebe vzájemně „převoditelné“.

Buď $\leq$ uspořádání na A, $X \subseteq A$. Definujeme, kdy prvek $a \in A$ je:

1. majoranta/horní mez třídy X,
2. minoranta/dolní mez třídy X,
3. maximální prvek třídy X,
4. minimální prvek třídy X,
5. největší prvek třídy X,
6. nejmenší prvek třídy X,
7. supremum třídy X,
8. infimum třídy X.

Buď $\leq$ uspořádání na A, $X \subseteq A$. Definujeme

1. X je dolní množina v A: $(y \leq x \in X) \rightarrow y \in X$ pro všechny $x, y \in A$.
2. X je horní množina v A: $(y \geq x \in X) \rightarrow y \in X$ pro všechny $x, y \in A$.
3. A je svaz, jestliže $A \neq \emptyset$ a pro libovolné $a, b \in A$ existuje v A supremum a infimum $\{a, b\}$.
4. A je úplný svaz, jestliže v A existuje supremum a infimum pro každou podmnožinu $x \subseteq A$.

Příklad

Pro množinu x je $\mathcal{P}(x)$ úplný svaz vzhledem k $\subseteq$.

Definice

Buď $\leq$ uspořádání na A, $F : A \to A$. F je monotónní *(vzhledem k $\leq$) na A jestliže*

$$a \leq a' \to F(a) \leq F(a').$$

Prvek $a \in A$ je pevný bod *funkce F, jestliže $F(a) = a$.*

Věta (o pevném bodě)

Monotónní funkce na úplném svazu má pevný bod.

Ekvivalence:

Definice

Relace E je ekvivalence na třídě A, je-li E na A:

- *reflexivní,*
- *symetrická,*
- *tranzitivní.*

Třída ekvivalence prvku x:

$$[x]_E = E[\{x\}] = \{y; \langle x, y\rangle \in E\}$$

Faktorizace třídy A dle ekvivalence E:

$$A/E = \{[x]_E; x \in A\}$$

Rozklad (množiny) A:

$$\bigcup P = A, \emptyset \notin P, x \cap y = \emptyset \text{ pro } x \neq y \in P$$

Lemma

- *Je-li E ekvivalence na A, je A/E rozklad A.*
- *Je-li P rozklad A, je $E = \{\langle x, y\rangle; (\exists p \in P)(x, y \in p)\}$ ekvivalence na A.*