Teorie množin - přednáška 3

25. 11. 2014

Buď $\leq$ uspořádání na A, $X \subseteq A$. Definujeme, kdy prvek $a \in A$ je:

1. majoranta/horní mez třídy X,
2. minoranta/dolní mez třídy X,
3. maximální prvek třídy X,
4. minimální prvek třídy X,
5. největší prvek třídy X,
6. nejmenší prvek třídy X,
7. supremum třídy X,
8. infimum třídy X.

Buď $\leq$ uspořádání na A, $X \subseteq A$. Definujeme

1. X je dolní množina v A: $(y \leq x \in X) \to y \in X$ pro všechny $x, y \in A$.
2. X je horní množina v A: $(y \geq x \in X) \to y \in X$ pro všechny $x, y \in A$.
3. A je svaz, jestliže $A \neq \emptyset$ a pro libovolné $a, b \in A$ existuje v A supremum a infimum $\{a, b\}$.
4. A je úplný svaz, jestliže v A existuje supremum a infimum pro každou podmnožinu $x \subseteq A$.

Příklad

Pro množinu x je $\mathcal{P}(x)$ úplný svaz vzhledem k $\subseteq$.

Definice

Buď $\leq$ uspořádání na A, $F : A \to A$. F je monotónní *(vzhledem k $\leq$) na A jestliže*

$$a \leq a' \to F(a) \leq F(a').$$

Prvek $a \in A$ je pevný bod *funkce F, jestliže $F(a) = a$.*

Věta (o pevném bodě)

Monotónní funkce na úplném svazu má pevný bod.

Ekvivalence:

Definice

Relace E je ekvivalence na třídě A, je-li E na A:

- *reflexivní,*
- *symetrická,*
- *tranzitivní.*

Třída ekvivalence prvku x:

$$[x]_E = E[\{x\}] = \{y; \langle x, y\rangle \in E\}$$

Faktorizace třídy A dle ekvivalence E:

$$A/E = \{[x]_E; x \in A\}$$

P je rozklad (množiny) A, jestliže:

- $\bigcup P = A$,
- $\emptyset \notin P$,
- $x \cap y = \emptyset$, pro $x \neq y \in P$.

Lemma

- *Je-li E ekvivalence na A, je A/E rozklad A.*
- *Je-li P rozklad A, je $E = \{\langle x, y\rangle; (\exists p \in P)(x, y \in p)\}$ ekvivalence na A.*

Můžeme nějak definovat velikost množiny?
Případ pasáčka ovcí: určit velikost množiny vs. porovnat velikosti dvou množin.

V konečném případě: porovnáváním dostáváme rozklad na třídy množin „stejné velikosti“ $\Rightarrow$ vybereme reprezentanty (přirozená čísla)$\Rightarrow$ dostáváme pojem „velikosti“.

Definice

Množiny x, y mají stejnou mohutnost, jestliže existuje bijekce mezi x a y. Píšeme $x \approx y$.

Tvrzení

Relace $\approx$ je ekvivalence na univerzální třídě.

Relace $\approx$ tedy dává rozklad $\mathbf{V}$ podle mohutnosti. Zbývá vybrat reprezentanty, to provedeme později za užití AC.

Příklad

$\mathbb{N} \approx \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ sudé}\}$; *Hilbertův hotel*

Definice

Množina x má *mohutnost menší nebo rovnou* *mohutnosti množiny y, jestliže existuje prosté zobrazení x do y. Píšeme* $x \preccurlyeq y$.
Je-li $x \preccurlyeq y$ a neexistuje bijekce mezi x a y, říkáme, že x má *menší mohutnost* *než y a píšeme* $x \prec y$.

Tvrzení

Relace $\preccurlyeq$ je reflexivní a tranzitivní na univerzální třídě.

Relace $\preccurlyeq$ není na **V** slabě antisymetrická, není to tedy uspořádání na **V**. Je to však uspořádání na třídě *kardinálních čísel*.

Příklad

$x \subseteq y \rightarrow x \preccurlyeq y$

Věta (Cantorova)

$x \prec \mathcal{P}(x)$

Důkaz.

Diagonální metoda. $\square$

$\Rightarrow$ shora neomezená škála nekonečných množin.

Cantorův paradox

Tvrzení

$x \approx y \rightarrow (x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x)$.

Důkaz.

Z definice. $\square$

Věta (Cantor-Bernsteinova)

$(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x) \rightarrow (x \approx y)$.

Důkaz.

Netriviální! Využívá větu o pevném bodě. $\square$

Přirozená čísla v ZF

Definujeme následující:

- $0 := \emptyset$,
- $1 := 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\}$,
- $2 := 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- $3 := 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- atd.

Pak platí:

$$n + 1 = n \cup \{n\},$$
$$n = \{0, 1, \dots, n - 1\},$$

tedy n je n-prvková množina. Problém: pro každé (metamatematické) n umíme napsat jeho definici v ZF, jak ale definovat vlastnost „být přirozeným číslem“? Jak definovat množinu přirozených čísel v ZF?

Definice

Množina x je induktivní, jestliže $\emptyset \in x$ a $(\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x)$.

Axiom nekonečna $\Rightarrow$ existuje induktivní množina.

Definice

Množina přirozených čísel se značí ω a definuje se

$$\omega = \bigcap \{x; x \text{ je induktivní}\}.$$

$\Rightarrow$ ω je nejmenší induktivní množina (vzhledem k inkluzi).
Prvky množiny ω se nazývají přirozená čísla.

Příklad

Platí

- $0 \in \omega$,
- $1 \in \omega$,
- $2 \in \omega$,
- $\ldots$

Ale obecně neplatí $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Může existovat $x \in \omega$, které neodpovídá žádnému metamatematickému přirozenému číslu; takové x je tzv. nestandardní přirozené číslo!

Definujeme funkci následníka $s : \omega \longrightarrow \omega$ předpisem $s(n) = n \cup \{n\}$.

Věta (Princip matematické indukce)

Buď $x \subseteq \omega$. Jestliže

- $\emptyset \in x$,
- $n \in x \rightarrow s(n) \in x$,

pak $x = \omega$.

Důkaz.

Taková x je induktivní. ω je nejmenší induktivní. $\square$

Příklad

Pro libovolná přirozená m, n platí

- $n \in \omega \rightarrow n \subseteq \omega$,
- $m \in n \rightarrow m \subseteq n$.

Tvrzení

Pro libovolná přirozená m, n platí

- $m \in n \leftrightarrow m \subset n$,
- $m \in n \vee m = n \vee n \in m$.

Důkaz.

Indukcí. □

$\Rightarrow$ relace $\in$ je ostré lineární uspořádání na ω.

Definice

Buď $\leq$ uspořádání na A. Říkáme, že $\leq$ je dobré uspořádání na A jestliže každá neprázdná podmnožina $x \subseteq A$ má nejmenší prvek vzhledem k $\leq$.

dobré $\Rightarrow$ lineární

Věta

Množina všech přirozených čísel je dobře uspořádaná relací $\in$.

Důkaz.

Z ax. fundovanosti existuje minimální prvek vzhledem k $\in$. Z linearity $\in$ na ω je nejmenší. $\square$

Konečné množiny v ZF

Definice

Množina x je konečná, jestliže každá neprázdná podmnožina $y \subseteq \mathcal{P}(x)$ má maximální prvek vzhledem k inkluzi. Třídu všech konečných množin značíme Fin.

Množina 3 je konečná.
Množina ω není konečná: $\omega \subseteq \mathbb{P}(\omega)$, ω nemá max. prvek vzhledem k inkluzi.

Platí následující:

Věta (Princip indukce pro konečné množiny)

Je-li X třída a platí

- $\emptyset \in X$,
- $x \in X \rightarrow (\forall y)(x \cup \{y\} \in X)$,

pak $Fin \subseteq X$.

Věta

Množina x je konečná $\Leftrightarrow$ existuje $n \in \omega$, t. že $x \approx n$.

$\Rightarrow$ přirozená čísla můžeme tedy nahlížet jako reprezentanty mohutností konečných množin.

Definujeme:

- x je spočetná, jestliže $x \approx \omega$
- x je nejvýše spočetná, jestliže je konečná, nebo spočetná,
- jinak je x nespočetná.