Definice

Buď $\leq$ uspořádání na A. Říkáme, že $\leq$ je **dobré uspořádání** *na A jestliže každá neprázdná podmnožina $x \subseteq A$ má nejmenší prvek vzhledem k $\leq$.*

dobré $\Rightarrow$ lineární

Věta

Množina všech přirozených čísel je dobře uspořádaná relací $\in$.

Důkaz.

Z ax. fundovanosti existuje minimální prvek vzhledem k $\in$. Z linearity $\in$ na ω je nejmenší. $\square$

Konečné množiny v ZF

Definice

Množina x je konečná, jestliže každá neprázdná podmnožina $y \subseteq \mathcal{P}(x)$ má maximální prvek vzhledem k inkluzi. Třídu všech konečných množin značíme Fin.

Množina 3 je konečná.
Množina ω není konečná: $\omega \subseteq \mathbb{P}(\omega)$, ω nemá max. prvek vzhledem k inkluzi.

Platí následující:

Věta (Princip indukce pro konečné množiny)

Je-li X třída a platí

- $\emptyset \in X$,
- $x \in X \rightarrow (\forall y)(x \cup \{y\} \in X)$,

pak $Fin \subseteq X$.

Věta

Množina x je konečná $\Leftrightarrow$ existuje $n \in \omega$, t. že $x \approx n$.

$\Rightarrow$ přirozená čísla můžeme tedy nahlížet jako reprezentanty mohutností konečných množin.

Definujeme:

- x je spočetná, jestliže $x \approx \omega$
- x je nejvýše spočetná, jestliže je konečná, nebo spočetná,
- jinak je x nespočetná.

Věta

Množina $\omega \times \omega$ je spočetná.

Buď x množina a f funkce na x (tedy $Dom(f) = x$). Funkce f je selektor na množině x, jestliže platí

$$(y \in x \wedge y \neq \emptyset) \rightarrow f(y) \in y.$$

$\Rightarrow$ Selektor tedy vybírá z každé neprázdné množiny jeden její prvek. Tento výběr se děje paralelně, nikoli postupně a máme k dispozici výsledek takového výběru (funkci f) jako objekt teorie množin.

Axiom výběru (AC) je následující tvrzení:

Na každé množině existuje selektor.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *AC*
2. *Je-li s relace, pak existuje funkce* $f \subseteq s$*, pro niž platí* $Dom(s) = Dom(f)$.
3. *Buď* $\langle a_i \rangle_{i \in x}$ *neprázdný soubor neprázdných množin. Pak* $\prod_{i \in x} a_i$ *je neprázdný.*

$\leq$ uspořádání na a, $b \subseteq a$: b je řetězec v a, je-li $\leq$ lineární uspořádání na b.

Princip maximality (PM)/Zornovo lemma je následující tvrzení:

Buď každý řetězec v a shora omezený. Pak ke každému $x \in a$ existuje maximální $m \in a$ takové, že $x \leq m$.

Věta

PM implikuje trichotomii $\preccurlyeq$.

Důkaz.

Buď a, b libovolné.
$d := \{f; f$ je prostá funkce , $Dom(f) \subseteq a, Rng(f) \subseteq b\}$. Buď d uspořádána inkluzí, pak každý řetězec v d je shora omezený (uvažte sjednocení). Z PM existuje maximální $g \supseteq f$. Buď $Dom(g) = a$, nebo $Rng(g) = b$. Tedy buď $a \preccurlyeq b$, nebo $b \preccurlyeq a$. $\square$

Princip dobrého uspořádání (WO) je následující tvrzení:

Pro každou a existuje relace R, která je dobrým uspořádáním na a – neboli každou množinu lze dobře uspořádat.

Věta

AC, PM a WO jsou ekvivalentní.

Ordinální čísla

- rozšíření přirozených čísel
- transfinitní indukce a rekurze
- ordinální aritmetika
- typy dobrých uspořádání(přirozená čísla typy dobrých uspořádání konečných množin)

Definice

Třída X je tranzitivní, jestliže platí $x \in X \rightarrow x \subseteq X$.

Tedy X je tranzitivní, právě tehdy když $y \in x \in X \rightarrow y \in X$.

Definice

Množina x je ordinální číslo/ordinál, jestliže x je tranzitivní a $\in$ je dobré ostré uspořádání na x. Třídu všech ordinálních čísel značíme On.

Ordinální čísla značíme většinou malými přísmeny z počátku řecké abecedy.

- Každé přirozené číslo je ordinál.
- ω je ordinál.
- Jak vypadají další ordinály?

Lemma

$\alpha \in$ *On* $\to \alpha \cup \{\alpha\} \in$ *On*.

Dohoda: relace $\in$ je dobré ostré uspořádání na *On*, proto často pro $\alpha, \beta \in$ *On* píšeme $\alpha < \beta$ místo $\alpha \in \beta$.

Lemma

$\alpha \cup \{\alpha\}$ *je nejmenší ordinál větší než* α.

- $\alpha \cup \{\alpha\}$ se nazývá následník ordinálu α.
- α se nazývá předchůdce ordinálu $\alpha \cup \{\alpha\}$.

Definice

Ordinál α *je* *izolovaný*, *jestliže* $\alpha = 0$, *nebo* α *má předchůdce.*
Ordinál α *je* *limitní*, *jestliže je nenulový a nemá předchůdce.*

- Každé přirozené číslo je izolované.
- ω je limitní.
- $\omega \cup \{\omega\}$ je izolované.

Věta

Je-li a dobře (ostře) uspořádaná relací R, pak existuje právě jedno ordinální číslo α a bijekce $f : a \to \alpha$ zachovávající uspořádání (tj. $xRy \leftrightarrow f(x) < f(y)$).

$\Rightarrow$ ordinální čísla jsou typy dobře uspořádaných množin

Věta

Třída On je tranzitivní a dobře ostře uspořádaná relací $\in$.

$\Rightarrow$ třída *On* je vlastní třída (Burali-Fortiho paradox).

Věta (o transfinitní indukci)

Buď $A \subseteq On$ třída taková, že

- $\emptyset \in A$,
- $\alpha \in A \to \alpha \cup \{\alpha\} \in A$,
- $\alpha \subseteq A \to \alpha \in A$, *pro* α *limitní.*

Potom $A = On$.

Transfinitní rekurze

Příklad rekurzivní definice: $n! = (n-1)! \cdot n$.

Rekurzivní definice sčítání přirozených čísel:

$$n + 0 = n$$
$$n + s(m) = s(n + m)$$

(Transfinitní) rekurze zaručuje že podobné (i transfinitní) definice jsou skutečně definice funkcí.

Věta (o transfinitní rekurzi)

Buď G třídová funkce (každé množině x přiřazuje množinu $G(x)$). Potom existuje právě jedno zobrazení $F : On \rightarrow \mathbf{V}$, které každému ordinálu α přiřazuje množinu

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha).$$

Ordinální aritmetika

lexikografické uspořádání na $On \times On$:

$$\langle \alpha, \beta \rangle <_{lex} \langle \alpha', \beta' \rangle \Leftrightarrow \alpha < \alpha' \vee (\alpha = \alpha' \wedge \beta < \beta').$$

Definice (ordinální součet)

Pro $\alpha, \beta \in$ *On definujeme* $\alpha + \beta$ *jako ordinální číslo, které je typem množiny* $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ *při lexikografickém uspořádání.*

- disjunktní sjednocení α, β
- na standardních přirozených číslech odpovídá klasickému sčítání
- obecně není komutativní!

Příklad

- $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$
- $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$
- $\omega + 1 \neq \omega + 2 \neq \omega$

Lemma

Pro libovolné ordinály α, β, γ platí

- $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$,
- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,
- $\alpha < \beta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$,
- $\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Definice (ordinální součin)

Pro $\alpha, \beta \in On$ *definujeme* $\alpha \cdot \beta$ *jako ordinální číslo, které je typem množiny* $\beta \times \alpha$ *při lexikografickém uspořádání.*

- tj. „β-krát za sebe položíme α“
- na standardních přirozených číslech odpovídá klasickému násobení
- obecně není komutativní

Příklad

$2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2$

Lemma

Pro libovolné ordinály α, β, γ *platí*

- $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$,
- $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$,
- $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,
- $\alpha < \beta \rightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$,
- $\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$,
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Definice (ordinální mocnina)

Pro $\alpha \in On$ definujeme mocninu α^β rekurzí podle β:

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha(\beta + 1) = \alpha^\beta \cdot \alpha$
- $\alpha^\beta =$ *sup*$\{\alpha^\gamma; 0 < \gamma < \beta\}$, *pro* β *limitní.*

Lemma

Pro libovolné ordinály α, β, γ platí

- $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$,
- $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

Definice

Funkce $F : On \to On$ *je normální, jestliže je rostoucí a spojitá (*F *je spojitá, jestliže* $F(\lambda) = sup\{F(\alpha); \alpha < \lambda\}$*, pro* λ *limitní).*

Věta (o pevném bodě normální funkce)

Buď $F : On \to On$ *normální funkce. Potom ke každému* $\alpha \in On$ *existuje* $\beta \geq \alpha$*, kde* β *je pevný bod funkce* F*. Navíc třída všech pevných bodů funkce* F *je uzavřená (t.j. supremum množiny pevných bodů je opět pevný bod).*

ε-čísla

Funkce $F(\alpha) = \omega^\alpha$ je normální. Existuje tedy její pevný bod. Ordinál ε je pevný bod, jestliže $\varepsilon = \omega^\varepsilon$. Pevné body můžeme indexovat ordinálními čísly.

ε_0 je nejmenší pevný bod.

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Ordinální čísla

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + \omega = \omega \cdot 2$$
$$\omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \ldots, \omega \cdot \omega = \omega^2$$
$$\omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^\omega$$
$$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \varepsilon_0$$
$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\omega$$
$$\varepsilon_\omega, \varepsilon_{\omega^\omega}, \varepsilon_{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \varepsilon_{\varepsilon_0}$$
$$\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0}}, \ldots$$

Všechny uvedené ordinály jsou stále jen spočetné.

Kardinální čísla

- opět rozšíření přirozených čísel
- kardinální aritmetika
- mohutnosti dobře uspořádaných množin

Definice

Ordinální číslo κ je kardinální číslo/kardinál, jestliže neexistuje prosté zobrazení κ na menší ordinál. Třídu všech kardinálních čísel značíme Cn.

Tedy $Cn = \{\kappa \in On; (\forall \xi < \kappa)(\xi \not\approx \kappa)\}$
Neboli kardinál je nejmenší ordinál příslušné mohutnosti.