Predikátová logika - přednáška 1

7. 12. 2014

Matematická logika

- (teorie množin), teorie modelů, teorie důkazů, aritmetické teorie, vyčíslitelnost/teorie rekurze, (dnes: výpočtová složitost)
- formální logické systémy a matematické struktury
- klasický systém: predikátová logika prvního řádu; mnoho dalších systémů (intuicionistická logika, logiky vyšších řádů, modální logiky, fuzzy logika, substrukturální logiky, infinitární logiky, . . .)

Dvě roviny - sémantika a syntax

1. Syntax
   - kalkulus konečných sekvencí symbolů (formálně v rámci teorie množin, pro konečné jazyky ovšem stačí aritmetika přirozených čísel)
   - pojmy: jazyk, proměnná, term, formule, důkazový systém/kalkulus, axiom, teorie, důkaz, spornost/bezespornost, kompletnost, ...
   - lze ji vybudovat bez ohledu na sémantiku, ovšem i pro důkazy čistě syntaktických tvrzení často vhodné přejít k sémantické stránce
2. Sémantika
   - struktury (definovány v teorii množin)
   - pojmy: univerzum, realizace symbolu, struktura, ohodnocení, platnost, splněnost, model, hodnota formule, podstruktura, ...
   - často definujeme s ohledem na syntax (např. struktura *pro daný jazyk*)

Syntax

Jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky prvního řádu obsahuje

1. logické symboly
   - spočetně mnoho proměnných: $v_0, v_1, v_2 \ldots$ (často píšeme $x, y, z \ldots$)
     množina proměnných se značí Var
   - závorky
   - logické spojky: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow$
   - kvantifikátory: $\forall, \exists$
2. mimologické symboly
   - relační symboly (s uvedenou aritou), jejich množina se značí $\mathcal{R}_\mathcal{L}$
   - funkční symboly (s uvedenou aritou), jejich množina se značí $\mathcal{F}_\mathcal{L}$
   - konstantní symboly, jejich množina se značí $\mathcal{C}_\mathcal{L}$
3. případně symbol $=$ (pokud není uvedeno jinak, pracujeme v jazyce s rovností)

Poznámky:

- Žádný symbol nemůže vystupovat ve více rolích – tj. uvedené množiny symbolů jsou po dvou disjunktní.
- Arita každého symbolu je přirozené číslo. Konstantní symboly můžeme chápat jako funkční symboly arity 0.
- Jazyk zapisujeme často pouze jako množinu mimologických symbolů. Další informace se dodají slovně či jsou zřejmé z kontextu.

Příklad

Jazyk aritmetiky: $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$, *kde* $0, 1$ *jsou konstantní symboly,* $+, \cdot$ *binární funkční symboly,* $\leq$ *binární relační symbol.*

Pozor! S výjimkou symbolu $=$ nemají funkční, relační a konstantní symboly daný pevný význam, ani aritu. Symbol $+$ tedy může vystupovat (v různých jazycích) jako konstanta, či relace libovolné arity.

Definice (Induktivní definice termu)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, množina všech termů jazyka $\mathcal{L}$ *se značí* $Term_{\mathcal{L}}$*. Je to nejmenší množina splňující následující:*

- $Var \subseteq Term_{\mathcal{L}}$ *(každá proměnná je term).*
- $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq Term_{\mathcal{L}}$ *(každá konstanta je term).*
- *Je-li* $t_0, \ldots, t_{n-1} \in Term_{\mathcal{L}}$ *a* $F \in \mathcal{L}$ *je funkční symbol arity n, pak* $F(t_0, \ldots, t_{n-1}) \in Term_{\mathcal{L}}$ *(aplikací funkčního symbolu na již vytvořené termy vznikne opět term).*

Poznámky:

- Term je tedy „správně utvořený výraz pro (matematický) objekt".
- Místo prefixní notace $+(x, y)$ často užíváme běžnou notaci infixní $x + y$.

Příklad

Termy jazyka aritmetiky jsou například $0, (x+0)\cdot(1+y), ((0+1)+0)$*. Termy* 1 *a* $1+0$ *jsou různé. Zda v dané struktuře platí* $1 = 1 + 0$ *záleží na realizaci symbolů* $1, 0, +$ *v této struktuře (tedy neplatí to automaticky).*

Definice (Atomická formule)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk. Atomická formule pro jazyk $\mathcal{L}$ je zápis tvaru $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$, kde R je n-ární relační symbol ($R \in \mathcal{L}$, či R je $=$) a $t_0, \ldots, t_{n-1} \in Term_{\mathcal{L}}$. Množina všech atomických formulí pro jazyk $\mathcal{L}$ se značí $AFm_{\mathcal{L}}$

Poznámky:

- Atomická formule je tedy „správně utvořený výraz pro jednoduché (matematické) tvrzení“.
- Místo prefixní notace $\leq (x, y)$ často užíváme běžnou notaci infixní $x \leq y$.
- Je-li R nulární relační symbol, pak R je atomická formule.

Definice (Induktivní definice formule)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk. Množina všech **formulí** *jazyka $\mathcal{L}$ se značí* $Fm_{\mathcal{L}}$*. Je to nejmenší množina splňující následující:*

- $AFm_{\mathcal{L}} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ *(atomická formule je formule).*
- *Buď* $\varphi, \psi \in Fm_{\mathcal{L}}$, $x \in Var$*. Potom* $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$, $\neg\varphi$, $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ *jsou v* $Fm_{\mathcal{L}}$ *(z již vytvořených formulí dostaneme formuli aplikací výrokových spojek či kvantifikací).*

Poznámky:

- Formule je tedy „správně utvořený výraz pro (matematické) tvrzení".
- Používáme běžná zjednodušení notace – např. vhodným způsobem vynecháváme závorky.

Sémantika

Základním sémantickým pojmem je pojem struktury. Daná struktura určuje význam symbolů jazyka.

Definice (Struktura)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk. Struktura pro jazyk $\mathcal{L}$ je dvojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}^A \rangle$, kde

- *$A \neq \emptyset$; A se nazývá univerzum/nosná množina*
- *$\mathcal{L}^A$ je množina realizací funkčních, predikátových a konstantních symbolů*
  - *je-li $R \in \mathcal{L}$ n-ární relační symbol, jeho realizace R^A je (nějaká) n-ární relace na A*
  - *je-li $F \in \mathcal{L}$ n-ární funkční symbol, jeho realizace F^A je (nějaká) n-ární funkce na A*
  - *je-li $c \in \mathcal{L}$ konstantní symbol, jeho realizace c^A je (nějaký) prvek A*
  - *realizace symbolu $=$ je relace identity na A*

Strukturu často zapisujeme jako množinu, nikoli jako uspořádanou dvojici.

Příklad

Struktura $\mathcal{A} = \{\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, \leq^{\mathbb{N}}\}$*, kde* $0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, \leq^{\mathbb{N}}$ *jsou po řadě* $0, 1$*, běžné sčítání, násobení a uspořádání přirozených čísel je strukturou pro jazyk aritmetiky.*