Definice

Funkce $F : On \to On$ *je* **normální**, *jestliže je rostoucí a* **spojitá** *(*F *je spojitá, jestliže* $F(\lambda) = sup\{F(\alpha); \alpha < \lambda\}$*, pro* λ *limitní).*

Věta (o pevném bodě normální funkce)

Buď $F : On \to On$ *normální funkce. Potom ke každému* $\alpha \in On$ *existuje* $\beta \geq \alpha$*, kde* β *je pevný bod funkce* F*. Navíc třída všech pevných bodů funkce* F *je uzavřená (t.j. supremum množiny pevných bodů je opět pevný bod).*

ε-čísla

Funkce $F(\alpha) = \omega^\alpha$ je normální. Existuje tedy její pevný bod. Ordinál ε je pevný bod, jestliže $\varepsilon = \omega^\varepsilon$. Pevné body můžeme indexovat ordinálními čísly.

ε_0 je nejmenší pevný bod.

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Ordinální čísla

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + \omega = \omega \cdot 2$$
$$\omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \ldots, \omega \cdot \omega = \omega^2$$
$$\omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^\omega$$
$$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \varepsilon_0$$
$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\omega$$
$$\varepsilon_\omega, \varepsilon_{\omega^\omega}, \varepsilon_{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \varepsilon_{\varepsilon_0}$$
$$\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0}}, \ldots$$

Všechny uvedené ordinály jsou stále jen spočetné.

Kardinální čísla

- opět rozšíření přirozených čísel
- kardinální aritmetika
- mohutnosti dobře uspořádaných množin

Definice

Ordinální číslo κ je *kardinální číslo/kardinál**, jestliže neexistuje prosté zobrazení κ na menší ordinál. Třídu všech kardinálních čísel značíme* *Cn*.

Tedy $Cn = \{\kappa \in On; (\forall \xi < \kappa)(\xi \not\approx \kappa)\}$
Neboli kardinál je nejmenší ordinál příslušné mohutnosti.
Kardinály obvykle značíme malými řeckými písmeny ze střední části abecedy.

- Každé přirozené číslo je kardinál.
- ω je kardinál.
- $\omega + 1$ není kardinál (žádný spočetný ordinál různý od ω není kardinál).

V dalším budeme pro jednoduchost pracovat v ZFC.

AC implikuje WO, tedy každou množinu *a* lze dobře uspořádat. Existuje tedy ordinál α, který je typem (nějakého) dobrého uspořádání *a*. Zřejmě tedy $\alpha \approx a$. Buď κ nejmenší ordinál, pro který platí $\kappa \approx \alpha$; tedy κ je kardinál.

Za předpokladu AC tedy ke každé množině *a* existuje kardinál κ, t. že $\kappa \approx a$.

Takový kardinál je zřejmě jediný a nazýváme ho mohutností množiny *a*.

Píšeme $|a| = \kappa$.

Lemma

Třída Cn je uzavřena na suprema (t.j. je-li X množina kardinálů, pak $\sup X$ je kardinál).

Věta

Ke každému kardinálu existuje větší kardinál.

Důkaz.

$\kappa < |\mathcal{P}(\kappa)|$ $\square$

$\Rightarrow$ *Cn* je vlastní třída.

Funkce $\aleph$ (hebrejské alef)

- Je-li $\kappa \in Cn$, pak následník kardinálu κ je nejmenší kardinál větší než κ, značíme ho κ^+.
- Kardinál κ je předchůdcem kardinálu λ, platí-li $\kappa^+ = \lambda$.
- Kardinál κ je limitní, jestliže nemá předchůdce.

Pozn.: Každý nekonečný kardinál je limitní ordinál. Ne každý nekonečný kardinál je limitní (kardinál).

Definice

Funkce $\aleph : On \to Cn$ je definována (transfinitní rekurzí) následovně:

- $\aleph(0) = \omega$,
- $\aleph(\beta + 1) = \aleph(\beta)^+$,
- $\aleph(\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} \aleph_\beta$.

Funkce $\aleph$ tedy enumeruje nekonečné kardinály ordinálními čísly.

Místo $\aleph(\alpha)$ píšeme $\aleph_\alpha$.

$\aleph_\alpha$ tedy označuje α-tý nekonečný kardinál.

Funkce $\aleph$ je normální funkce (má tedy pevné body).

Lemma

Pro každé $\alpha \in$ *On platí* $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha$.

Důkaz.

Využijte maximolexikografické uspořádání. $\square$

Definice (kardinální součet a kardinální součin)

Buď κ, λ *kardinály. Pak* $\kappa + \lambda$ *definujeme jako* $|(\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \lambda)|$; $\kappa \cdot \lambda$ *definujeme jako* $|\lambda \times \kappa|$.

Pro standardní přirozená čísla se kardinální součet a součin shoduje s klasickým součtem a součinem.

Lemma

Buď $\kappa, \lambda \in$ Cn, alespoň jedno z nich nekonečné. Pak platí

- $\kappa + \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$,
- $\kappa \cdot \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$.

Definice (kardinální mocnina)

Buď κ, λ *kardinály. Pak* κ^λ *definujeme jako* $|{}^\lambda\kappa|$.

Lemma

Pro libovoné kardinály $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ *platí*

- $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$,
- $(\kappa^\mu)^\nu = \kappa^{\mu\cdot\nu}$,
- $\kappa^0 = 1$.

Mohutnost potenční množiny

Definice

Buď x *množina,* $y \subseteq x$. *Funkce* $\chi_y : x \to 2$, *pro niž platí*

$$\chi_y(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } z \in y \\ 0 & \text{if } z \notin y, \end{cases}$$

se nazývá ***charakteristická funkce*** *množiny* y *v množině* x.

Věta

Buď x množina, potom

$$|\mathcal{P}(x)| = 2^{|x|}.$$

Důkaz.

Buď $\kappa = |x|$. Stačí dokázat $|\mathcal{P}(\kappa)| = 2^{\kappa}$. Ztotožněním podmnožiny s její charakteristickou funkcí dostáváme ${}^{\kappa}2 \approx \mathcal{P}(\kappa)$. $\square$

Hypotéza kontinua

- Buď $[0,1]$ uzavřený interval reálných čísel. Platí $|[0,1]| = 2^\omega$ (např. z úvahy o binárním rozvoji).
- Lze ukázat, že $|[0,1]| = |\mathbb{R}|$.
- Tedy $|\mathbb{R}| = 2^\omega$, neboli $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Mohutnost $|\mathbb{R}|$ se nazývá mohutnost kontinua.

Je zřejmé, že $|\mathbb{R}| > \aleph_0$ (z Cantorovy věty).

Ukazuje se, že v ZFC nelze rozhodnout, jaká je „přesná hodnota“ mohutnosti kontinua.

Hypotéza kontinua (CH) je následující tvrzení: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

- Tedy CH tvrdí, že mohutnost kontinua je „nejmenší možná“.
- Dlouho otevřený problém – jeden ze slavných 23 Hilbertových problémů.
- 1940: Gödel ukázal, že je-li ZF bezesporná, pak i ZFC + CH je bezesporná (metoda konstruovatelných množin).
- 1963: Cohen ukázal, že je-li ZF bezesporná, pak i ZFC + $\neg$CH je bezesporná (metoda forcingu).

$\Rightarrow$ hypotéza kontinua je tedy nezávislá na axiomech ZFC.

Dodnes se vedou matematicko-filosofické diskuze o přijetí/nepřijetí CH (a stanovení „přirozené“ hodnoty $2^{\aleph_0}$), o tom, zda je problematika CH vůbec „matematický problém“, či o opuštění platonské představy „jednoho univerza“.