Predikátová logika - přednáška 2

16. 12. 2014

Sémantika

Základním sémantickým pojmem je pojem struktury. Daná struktura určuje význam symbolů jazyka.

Definice (Struktura)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk. Struktura pro jazyk $\mathcal{L}$ je dvojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}^A \rangle$, kde

- *$A \neq \emptyset$; A se nazývá univerzum/nosná množina*
- *$\mathcal{L}^A$ je množina realizací funkčních, predikátových a konstantních symbolů*
  - *je-li $R \in \mathcal{L}$ n-ární relační symbol, jeho realizace R^A je (nějaká) n-ární relace na A*
  - *je-li $F \in \mathcal{L}$ n-ární funkční symbol, jeho realizace F^A je (nějaká) n-ární funkce na A*
  - *je-li $c \in \mathcal{L}$ konstantní symbol, jeho realizace c^A je (nějaký) prvek A*
  - *realizace symbolu $=$ je relace identity na A*

V rámci sémantiky jsme induktivně definovali (postupně) tyto pojmy

1. term,
2. atomická formule,
3. formule.

Nyní opět induktivně definujeme jejich hodnoty v dané struktuře při daném ohodnocení.

Definice

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}^A \rangle$ struktura pro jazyk $\mathcal{L}$. Ohodnocení (proměnných) ve struktuře $\mathcal{A}$ je libovolná funkce $e : Var \to A$.

Definice (hodnota termu při ohodnocení)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}^A \rangle$ struktura pro $\mathcal{L}$, e ohodnocení v $\mathcal{A}$. Pro term $t \in Term_{\mathcal{L}}$ definujeme jeho hodnotu $t^A[e]$ při ohodnocení e následovně:

- $x^A[e] = e(x)$ *(hodnota proměnné je dána bezprostředně ohodnocením)*
- $c^A[e] = c^A$ *(hodnota konstanty je dána bezprostředně její realizací)*
- $F(t_0, \ldots, t_{n-1})^A[e] = F^A(t_0^A[e], \ldots, t_{n-1}^A[e])$

Hodnota formule je prvek množiny $\{0, 1\}$, kde 0 představuje nepravdu, 1 pravdu.

Definice (Hodnota atomické formule při ohodnocení)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}^A \rangle$ struktura pro $\mathcal{L}$, e ohodnocení v $\mathcal{A}$, φ atomická formule pro $\mathcal{L}$ tvaru $R(t_0, \dots, t_{n-1})$. Její hodnotu $H^A(\varphi, e)$ v dané struktuře při daném ohodnocení definujeme takto:

$$H^A(\varphi, e) = \begin{cases} 1 & \textit{jestliže } \langle t_0^A[e], \dots, t_{n-1}^A[e] \rangle \in R^A \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

Buď $e : Var \to A$ ohodnocení, $a \in A$. Symbol $e(x/a)$ značí ohodnocení, které proměnné x dává hodnotu a a na ostatních proměnných se shoduje s ohodnocením e.

Definice (Hodnota formule při ohodnocení/Tarského definice pravdy)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}^A \rangle$ struktura pro $\mathcal{L}$, e ohodnocení v $\mathcal{A}$, φ formule pro $\mathcal{L}$. Hodnotu $H^A(\varphi, e)$ dané formule v dané struktuře při daném ohodnocení definujeme (indukcí dle složitosti φ) takto:

1. *Je-li φ atomická, je $H^A(\varphi, e)$ již definováno.*
2. *Jinak definujeme*
    - $H^A(\psi \wedge \chi, e) = 1 \Leftrightarrow H^A(\psi, e) = 1$ *a zároveň* $H^A(\chi, e) = 1$
    - $H^A(\psi \vee \chi, e) = 1 \Leftrightarrow H^A(\psi, e) = 1$ *nebo* $H^A(\chi, e) = 1$
    - $H^A(\psi \rightarrow \chi, e) = 1 \Leftrightarrow H^A(\psi, e) = 0$ *nebo* $H^A(\chi, e) = 1$
    - $H^A(\psi \leftrightarrow \chi, e) = 1 \Leftrightarrow H^A(\psi, e) = H^A(\chi, e)$
    - $H^A(\neg\psi, e) = 1 \Leftrightarrow H^A(\psi, e) = 0$
    - $H^A(\forall x \psi, e) = 1 \Leftrightarrow$ *pro každé* $a \in A$ *platí* $H^A(\psi, e(x/a)) = 1$
    - $H^A(\exists x \psi, e) = 1 \Leftrightarrow$ *pro nějaké* $a \in A$ *platí* $H^A(\psi, e(x/a)) = 1$

Poznámky k předchozí definici:

- Stále platí (v definici už výslovně neuvádíme), že hodnota formule je prvek množiny $\{0,1\}$. Tedy pro stručnost uvádíme

$$H^A(\psi \wedge \chi, e) = 1 \Leftrightarrow H^A(\psi, e) = 1 \text{ a zároveň } H^A(\chi, e) = 1$$

místo

$$H^A(\psi \wedge \chi, e) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } H^A(\psi, e) = 1 \text{ a zároveň } H^A(\chi, e) = \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- Místo $H^A(\varphi, e) = 1$ obvykle píšeme $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ a čteme „formule φ je splněna/platí při ohodnocení e ve struktuře $\mathcal{A}$“.

Definice (Platnost formule ve struktuře)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}^A \rangle$ struktura pro $\mathcal{L}$, φ formule pro $\mathcal{L}$. Formule φ platí ve sturktuře $\mathcal{A}$, píšeme $\mathcal{A} \models \varphi$, jestliže $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení $e : Var \to A$.

Pozor! Není obecně pravda, že $\mathcal{A} \models \varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \neg\varphi$. (Tedy $\mathcal{A} \not\models \varphi$ neimplikuje $\mathcal{A} \models \neg\varphi$). Platí-li φ v každé struktuře pro daný jazyk, říkáme, že φ je tautologie.

Syntax - pokračování

Výskyt proměnné ve formuli:

- volný (neleží v dosahu příslušného kvantifikátoru)
- vázaný (leží v dosahu příslušného kvantifikátoru)

Příklad

Ve formuli

$$(\exists x)(\forall z)(x = z \vee x = y) \wedge (y = z)$$

jsou vázané výskyty označeny červeně, volné modře. Symboly x, z černé barvy nejsou výskyty proměnných, považujeme je za součást symbolu pro kvantifikaci.

Formule se nazývá uzavřená formule, neboli sentence, nemá-li v ní žádná proměnná volný výskyt. Formule se nazývá otevřená, neobsahuje-li žádnou kvantifikaci. (Pozor! Formule může být zároveň uzavřená i otevřená.)

Přejmenování vázaných proměnných

Substituovatelnost

Substituce termu t do formule φ za proměnnou x

- nahrazují se **volné** výskyty x **substituovatelným** termem t
- $\varphi(x/t)$

Definice

Buď $\mathcal{L}$ jazyk. Teorie pro jazyk $\mathcal{L}$ je (libovolná) množina T $\mathcal{L}$-formulí. Prvky T se nazývají (mimologické) axiomy (teorie T).

Hilbertovský kalkulus

- důkazový systém (jeden z mnoha)
- umožňuje precizovat pojem důkazu
- obsahuje logické axiomy (tautologie, nejjednodušší dokazatelná tvrzení) a logická pravidla (umožňující odvozovat další tvrzení z již dokázaných)
- logické axiomy: výrokové, kvantifikátorové, axiomy rovnosti (pro jazyk s rovností)

Výrokové axiomy

Buď φ, ψ, χ libovolné formule (pro nějaký jazyk), pak následující formule jsou axiomy:

- $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
- $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$
- $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
- $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
- $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$
- $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
- $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
- $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$

Pozn.: Spojku $\leftrightarrow$ chápeme jako definovanou.

Kvantifikátorové axiomy

Buď φ, ψ libovolné formule (pro nějaký jazyk) a t libovolný term (pro tentýž jazyk) takové, že term t je substituovatelný za x ve φ. Pak následující formule jsou axiomy:

- $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$
- $\varphi(x/t) \rightarrow (\exists x)\varphi$

Axiomy rovnosti

Buď R relační symbol (daného jazyka nebo symbol $=$) vhodné arity, F funkční symbol (daného jazyka) vhodné arity, $x, x_0, \ldots x_{n-1}$, $y_0, \ldots, y_{n-1}$ proměnné. Pak následující formule jsou axiomy:

- $x = x$
- $x_0 = y_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \rightarrow (R(x_0, \ldots x_{n-1}) \rightarrow R(y_0, \ldots, y_{n-1}))$
- $x_0 = y_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \rightarrow (F(x_0, \ldots x_{n-1}) = F(y_0, \ldots, y_{n-1}))$

Z axiomů rovnosti plyne, že $=$ je ekvivalence (navíc je to kongruence vůči relacím a funkcím daného jazyka).

Odvozovací pravidla

- Modus ponens: Z formulí φ a $\varphi \rightarrow \psi$ odvoď ψ.
- $\forall$-generalizace: Z formule $\psi \rightarrow \varphi$ odvoď formuli $\psi \rightarrow (\forall x)\varphi$, pokud x není volná v ψ
- $\exists$-generalizace: Z formule $\varphi \rightarrow \psi$ odvoď formuli $(\exists x)\varphi \rightarrow \psi$, pokud x není volná v ψ

Definice

Buď T teorie v jazyce $\mathcal{L}$. Důkaz v T je posloupnost d $\mathcal{L}$-formulí $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ taková, že pro každé φ_i z d platí jedno z následujících

- *φ_i je axiom teorie T*
- *φ_i je logický axiom*
- *φ_i je odvozena z formule φ_j, kde $j < i$, pomocí pravidla $\forall$-generalizace, či $\exists$-generalizace*
- *φ_i je odvozena z formulí φ_j, φ_k, kde $j, k < i$, pomocí pravidla modus ponens.*

Je-li d důkaz v T a φ je poslední položka posloupnosti d, říkáme, že d je důkaz formule φ v teorii T. Existuje-li důkaz formule φ v T, říkáme, že formule φ je dokazatelná v T a píšeme $T \vdash \varphi$. Je-li teorie T prázdná (neobsahuje žádné axiomy), píšeme místo $\emptyset \vdash \varphi$ pouze $\vdash \varphi$ a říkáme, že φ je

- Je-li $T \vdash \neg\varphi$, říkáme, že φ je vyvratitelná v T.
- Není-li φ v T dokazatelná, ani vyvratitelná, říkáme, že je v T nezávislá.
- Platí-li $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ pro nějakou φ, říkáme, že T je sporná.
- Je-li T bezesporná a každá **sentence** (příslušného jazyka) je v T dokazatelná či vyvratitelná, říkáme, že T je kompletní/úplná.

Sémantika - pokračování

Definice

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, $\mathcal{A}$ struktura pro $\mathcal{L}$, T teorie v $\mathcal{L}$. $\mathcal{A}$ je model teorie T, jestliže platí $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každou $\varphi \in T$. Píšeme $\mathcal{A} \models T$.
$\mathcal{L}$-formule φ platí v T, jestliže $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každý model $\mathcal{A}$ teorie T. Píšeme $T \models \varphi$.

Je-li T prázdná, píšeme místo $\emptyset \models \varphi$ pouze $\models \varphi$.
Platí: $\models \varphi \Leftrightarrow \varphi$ je tautologie.

Věta (o dedukci)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$, φ $\mathcal{L}$-sentence a ψ $\mathcal{L}$-formule. Pak

$$T \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow T \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Věta (o kompaktnosti)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$. Teorie T má model, právě když každá konečná $S \subseteq T$ má model.

Věta (o korektnosti a úplnosti)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$, φ $\mathcal{L}$-formule. Pak

$$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi.$$