Neúplnost a nerozhodnutelnost

6. 1. 2015

Dva pojmy úplnosti

1. úplnost kalkulu (syntaktická strana) vůči sémantice – „cokoli platí (sémanticky), můžeme dokázat(syntakticky)"
   - věta o úplnosti dokázaná v přednášce o predikátové logice
2. úplnost teorie – „teorie plně popíše, co platí a co neplatí"
   - Gödelovy věty o neúplnosti

Upozornění

Následující poznámky jsou **velmi** neformální, rozhodně nejsou vhodným podkladem pro studium dané oblasti. Řada podstatných detailů je zamlčena.

Robinsonova aritmetika (Q)

- $S(x) \neq 0$
- $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
- $y \neq 0 \rightarrow (\exists x)(S(x) = y)$
- $x + 0 = x$
- $x + S(y) = S(x + y)$
- $x \cdot 0 = 0$
- $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
- $x \leq y \leftrightarrow (\exists z)z + x = y$

Peanova aritmetika (PA)

všechny axiomy Q + navíc schéma indukce

$$(\varphi(0) \wedge (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$$

- PA je „rozumná“ aritmetická teorie – struktura $\mathbb{N}$ je jejím modelem (tzv. standardní model)
- PA má i tzv. nestandardní modely – obsahující číslo L větší než všechna standardní čísla (plyne z kompaktosti obdobně jako v případě ZFC)
- PA je neúplná – existují nezávislé sentence; tedy existují modely, které nejenže jsou nestandardní, ale dokonce se liší od $\mathbb{N}$ platností nějakého aritmetického tvrzení (nejsou elementárně ekvivalentní $\mathbb{N}$)
- PA dokonce nelze „rozumným způsobem“ zúplnit – každá bezesporná „algoritmicky zadatelná“ teorie rozšiřující PA je neúplná
- známe příklad nezávislé sentence – je to sentence vyjadřující „já jsem nedokazatelná“
- zároveň PA není schopná dokázat vlastní bezespornost – sentenci vyjadřující „PA je bezesporná“

Následující formulace Gödelových vět jsou velmi speciální v tom ohledu, že se v nich omezujeme na *PA*. Lze je formulovat obecněji pro teorie splňující určité podmínky – mimo jiné rozšiřující určitou rozumnou aritmetickou teorii.

- kódování konečných posloupností: $\bar{\varphi}$ … kód formule φ
- lemma o autoreferenci: Ke každé aritmetické formuli $\psi(x)$ existuje aritmetická sentence φ taková, že $Q \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\bar{\varphi})$. (Vlastně věta o pevném bodě; opět diagonální argument.)
- predikát dokazatelnosti v PA: $Pr(x)$

Věta (první Gödelova o neúplnosti)

Existuje aritmetická sentence nezávislá v PA, tedy PA není úplná.

Příkladem takové sentence je ν, pro niž platí $PA \vdash \nu \leftrightarrow \neg Pr(\bar{\nu})$. Jde vlastně o formalizaci paradoxu lháře, jen pravdivost je nahazena dokazatelností.

- sentence vyjadřující bezespornost PA: Con_{PA}

Věta (druhá Gödelova o neúplnosti)

$PA \nvdash Con_{PA}$

Tedy PA nedokazuje vlastní bezespornost. Tím spíše nelze dokázat bezespornost teorie množin konečnými metodami $\Rightarrow$ pád Hilbertova programu.

Věta (o neexistenci definice pravdy)

V PA neexistuje definice pravdy, tj. formule π taková, že pro každou sentenci φ platí $PA \vdash \varphi \leftrightarrow \pi(\bar{\varphi})$.

Plyne z lemmatu o autoreferenci. Formalizace paradoxu lháře.

Nerozhodnutelnost

Teorie T je rozhodnutelná, jestliže existuje „algoritmus“, který o každé formuli v jazyce teorie T rozhodne, zda je v T dokazatelná či nikoli.
Platí následující věty:

Věta

Rekurzivně axiomatizovaná („axiomatika je dána nějakým algoritmem“) úplná teorie je rozhodnutelná.

Věta

Bezesporná teorie T rozšiřující Robinsonovu aritmetiku je nerozhodnutelná. Speciálně PA je nerozhodnutelná.