Predikátová logika - přednáška 3

6. 1. 2015

Věta (o dedukci)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$, φ $\mathcal{L}$-sentence a ψ $\mathcal{L}$-formule. Pak

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow T \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Věta (o kompaktnosti)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$. Teorie T má model, právě když každá konečná $S \subseteq T$ má model.

Věta (o korektnosti a úplnosti)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$, φ $\mathcal{L}$-formule. Pak

$$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi.$$

Věta (o korektnosti)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$, φ $\mathcal{L}$-formule. Pak

$$T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi.$$

Důkaz.

Indukcí dle délky důkazu. Ověří se postupně

- $T \models \psi$, pro libovolný logický axiom ψ,
- $T \models \chi$, pro libovolný axiom $\chi \in T$,
- odvozovací pravidla „přenáší platnost v T" (např. pro MP máme: jestliže $T \models \alpha$ a $T \models \alpha \to \beta$, pak $T \models \beta$).

□

Věta (o dedukci)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$, φ $\mathcal{L}$-sentence a ψ $\mathcal{L}$-formule. Pak

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow T \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Důkaz.

- $\Rightarrow$: použijeme MP
- $\Leftarrow$: indukcí dle délky důkazu.
  - Je-li ψ axiom (logický, nebo teorie T), plyne $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ pomocí MP z výrokového axiomu $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.
  - Je-li ψ formule φ, pak $T \vdash \varphi \rightarrow \varphi$ (příklad z minulé hodiny).
  - Je-li ψ odvozena pomocí MP z $\chi \rightarrow \psi$ a χ, pak z indukčního předpokladu $T \vdash \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$ a $T \vdash \varphi \rightarrow \chi$. $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ dostaneme pomocí MP z výrokového axiomu $(\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$.
  - Je-li ψ odvozena pomocí generalizace, důkaz je podobný jako pro příklad MP, pouze technicky náročnější. (Vynecháme ho.)

$\square$

Věta (o úplnosti)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$, φ $\mathcal{L}$-formule. Pak

$$T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi.$$

Lemma

Buď φ sentence. Jestliže (T je bezesporná a) $T \nvdash \varphi$, pak $T \cup \{\neg\varphi\}$ je bezesporná.

Důkaz.

Sporem. Z věty o dedukci a axiomu $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$. $\square$

Důkaz věty o úplnosti:

- Stačí dokázat pro případ, kdy φ je sentence. V obecném případě pracujeme místo φ s jejím generálním uzávěrem.
- Ukážeme (ekvivalentně) $T \nvdash \varphi \Rightarrow T \not\models \varphi$.
  - Předpokládejme $T \nvdash \varphi$. Tedy speciálně T je bezesporná.
  - Z předchozího lemmatu $T \cup \{\neg\varphi\}$ je bezesporná.
  - **Ukážeme, že každá bezesporná teorie má model.**
  - Tedy $T \cup \{\neg\varphi\}$ má model. Označme ho $\mathcal{M}$.
  - Bezprostředně z definic: $\mathcal{M} \models T$ a $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.
  - Tedy $T \not\models \varphi$.

Tvrzení (o existenci modelu)

Bezesporná teorie má model.

- Navíc, pokud T je teorie pro jazyk $\mathcal{L}$ a $||\mathcal{L}||$ definujeme jako $max(\omega, |L|)$, platí, že existuje model T mohutnosti nejvýše $||\mathcal{L}||$. (Plyne bezprostředně z našeho důkazu, pokud bychom kontrolovali mohutnost jazyka a univerza kanonického modelu.)
- Myšlenky důkazu:
  - Model, tzv. kanonický model, postavíme ze syntaktického materiálu.
  - Do jazyka přidáme henkinovské konstanty - ty se budou chovat jako svědci kvantifikátorů.
  - Budeme pracovat v maximálním bezesporném henkinovském rozšíření teorie T - díky tomu se nám podaří dokazatelnost přeložit na platnost v modelu.
  - V případě jazyka s rovností budeme ještě faktorizovat, abychom zaručili, že realizací symbolu $=$ je skutečně identita.

Definice

Teorie T v jazyce $\mathcal{L}$ je henkinovská, jestliže pro každou $\mathcal{L}$-formuli $\varphi(x)$ s nejvýše jednou volnou proměnnnou x existují konstantní symboly $c_\varphi^\exists, c_\varphi^\forall \in \mathcal{L}$ takové, že $T \vdash (\exists x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(c_\varphi^\exists)$ a $T \vdash \varphi(c_\varphi^\forall) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$. Symboly $c_\varphi^\exists, c_\varphi^\forall$ se nazývají henkinovské konstanty.

Pozn.: Místo implikací lze psát ekvivalence (implikace zprava doleva jsou dokazatelné).

Tvrzení

Každou bezespornou teorii T v jazyce $\mathcal{L}$ lze rozšířit do maximální bezesporné henkinovské teorie T' v jazyce $\mathcal{L}'$.

Důkaz.

Technický, indukcí, neuvádíme. □

Buď T' maximální bezesporná henkinovská teorie v jazyce $\mathcal{L}'$ **bez** rovnosti. Definujeme kanonickou strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}^A \rangle$.

- Univerzum A je množina všech konstantních termů (tj. termů neobsahujících proměnné) jazyka $\mathcal{L}'$. A je neprázdná, jelikož obsahuje minimálně henkinovské konstanty.
- Definujme realizace symbolů za jazyka; $t_0, \ldots, t_{n-1}$ jsou konstatní termy.
  - Buď F funkční symbol: $F^A(t_0, \ldots, t_{n-1})$ definujeme jako $F(t_0, \ldots, t_{n-1})$.
  - Buď R relační symbol: definujeme $\langle t_0, \ldots, t_{n-1} \rangle \in R^A \Leftrightarrow T \vdash R(t_0, \ldots, t_{n-1})$.
  - Buď c konstantní symbol: definujeme $c^A = c$.

Lemma

Pro výše uvedené T', $\mathcal{L}'$, $\mathcal{A}$, libovolnou $\mathcal{L}'$ formuli $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ a ohodnocení e platí:

$$\mathcal{A} \models \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})[e] \Leftrightarrow T' \vdash \varphi(e(x_0), \ldots e(x_{n-1})).$$

Důkaz.

Indukcí dle složitosti formule.

□

Důsledek

$\mathcal{A} \models T'$.

Dokončení důkazu – existence modelu pro jazyk **bez** rovnosti

- Začneme s bezespornou teorií T pro jazyk $\mathcal{L}$.
- Rozšíříme ji do maximální bezesporné henkinovské teorie T' pro jazyk $\mathcal{L}'$.
- Sestrojíme kanonický model $\mathcal{A}$. Platí $\mathcal{A} \models T'$.
- My ovšem hledáme model teorie T v $\mathcal{L}$, nikoli T' v $\mathcal{L}'$– vezmeme tzv. redukt modelu $\mathcal{A}$ do jazyka $\mathcal{L}$ (zachováme univerzum, zachováme realizace symbolů z $\mathcal{L}$, zapomeneme na realizace symbolů z $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$).

Kanonický model $\mathcal{K} = \langle K, \mathcal{L}^K \rangle$ pro jazyk s rovností

- Stejná definice jako pro jazyk bez rovnosti, jen navíc celou strukturu vyfaktorizujeme.
- Definujeme relaci $\sim$ na množině A všech konstantních termů následovně: $t \sim s \Leftrightarrow T \vdash t = s$.
- Relace je zřejmě ekvivalence (díky axiomům rovnosti).
- Univerzem kanonického modelu bude $K = A/\sim = \{[t]; t \in A\}$.
- Realizace funkčních a relačních symbolů definujeme na třídách ekvivalence pomocí reprezentantů (korektní definice díky axiomům rovnosti):
  - $\langle [t_0], \ldots, [t_{n-1}] \rangle \in R^K \Leftrightarrow T \vdash R(t_0, \ldots, t_{n-1})$,
  - $F^K([t_0], \ldots, [t_{n-1}]) = [F(t_0, \ldots, t_{n-1})]$,
  - $c^K = [c]$.

Důkaz existence modelu pro jazyk s rovností

- Obdobně jako pro jazyk bez rovnosti, jen se změněnou definicí kanonického modelu.

Konec důkazu věty o úplnosti

Lemma

T má model, právě tehdy když T je bezesporná (= není sporná).

Důkaz.

- $\Leftarrow$: Právě dokázané tvrzení o existenci modelu.
- $\Rightarrow$: Sporem. Buď $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ pro nějakou φ. Z korektnosti $T \models \varphi \wedge \neg\varphi$. Tedy v každém modelu T platí $\varphi \wedge \neg\varphi$, tedy T nemá model.

$\square$

Věta (o kompaktnosti)

Buď $\mathcal{L}$ jazyk, T teorie pro $\mathcal{L}$. Teorie T má model, právě když každá konečná $S \subseteq T$ má model.

Důkaz.

Ekvivalentně stačí dokázat: Teorie T je bezesporná, právě tehdy když každá konečná $S \subseteq T$ je bezesporná.

- $\Rightarrow$: Bezprostředně z definice.
- $\Leftarrow$: Sporem. Předpokládejme, že T je sporná, tedy $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ pro nějakou φ. Buď d příslušný důkaz. Z definice je d **konečný**. Tedy je důkazem v S, pro nějakou konečnnou $S \subseteq T$. Tedy S je sporná.

$\square$

Příklad

Má-li T libovolně velké konečné modely, má i nekonečný model.

Nestandardní přirozená čísla

- Předpokládejme, že *ZFC* je bezesporná teorie. Buď $\mathcal{M}$ její model.
- Přidejme do jazyka teorie množin novou konstantu L.
- Uvažujme teorii $T = ZFC \cup \{L \in \omega\} \cup \{L > n; n \in \mathbb{N}\}$. (Tato teorie o L tvrdí, že je to přirozené číslo větší než všechna standardní přirozená čísla.)
- Buď $S \subseteq T$ konečná. Zřejmě můžeme ve struktuře $\mathcal{M}$ realizovat konstantu L tak, aby $\mathcal{M} \models S$. (Realizací bude nějaké dostatečně velké přirozené číslo – prvek ω.)
- Z kompaktnosti existuje model teorie T. Realizací konstanty L v tomto modelu je nestandardní přirozené číslo.