Výroková a predikátová logika - cvičení 3

1. Mějme k dispozici prvovýroky pro všechny jednoduché věty. Pokuste se pomocí nich a výrokových spojek vyjádřit následující souvětí.
   (a) Nerada chodím do školy, ale na cvičení z logiky se těším.
   (b) To by v tom musel být čert, abych tohle souvětí nezapsala výrokovou formulí.
   (c) Naše cvičící si snad myslí, že je tohle vtipné.

2. Zapište/zakreslete **vytvořující strom** formule $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$.

3. Buď $\mathbb{P}$ množina prvovýroků. Definujte indukcí (dle složitosti formule) funkci $f : VF_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{N}$ takovou, že $f(\varphi)$ je rovno počtů **výskytů prvovýroků** z $\mathbb{P}$ ve φ. Je možné definovat induktivně funkci přiřazující formuli počet v ní se vyskytujících prvovýroků?

4. Zapište v **CNF** (resp. **DNF**) formuli reprezentující následující Booleovskou funkci f:

p	q	r	$f(p,q,r)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

5. Rozhodněte, které z následujících množin spojek jsou **univerzální**: $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\downarrow\}$, $\{\uparrow\}$[1], $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Existuje unární univerzální spojka?

6. Převeďte následující formule do CNF a DNF dvěma metodami: určením modelů (tabulkou) a ekvivalentními úpravami (přepisem).
   (a) $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \vee r)$,
   (b) $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$,
   (c) $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$.

7. Pomocí **implikačního grafu** zjistěte, zda je následující výrok v 2-CNF splnitelný. Pokud ano, nalezněte splňující ohodnocení.

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (s \vee r)$$

8. Zjistěte za použití **jednotkové propagace**, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_4 \vee p_5)$$

9. Buď T teorie $\{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}); i \in \mathbb{N}\}$ nad $var(T)$.
   (a) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \rightarrow p_j$ pravdivý v T?
   (b) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \rightarrow (p_j \vee q_j)$ pravdivý v T?

[1] $\downarrow$ – Piercova šipka, NOR; $\uparrow$ – Shefferova šipka, NAND