Výroková a predikátová logika - cvičení 4

1. Pomocí **implikačního grafu** zjistěte, zda je následující výrok v 2-CNF splnitelný. Pokud ano, nalezněte splňující ohodnocení.

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (\neg s \vee q) \wedge (s \vee r)$$

2. Zjistěte za použití **jednotkové propagace**, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_4 \vee p_5)$$

3. Kolik výroků lze sestavit z n prvovýroků? Kolik **neekvivalentních** výroků lze sestavit z n prvovýroků?

4. Mějme množinu prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$ a **teorii** (nad $\mathbb{P}$) $T = \{r; p \rightarrow q\}$.
   (a) Uveďte příklady výroků takových, že jsou v T **pravdivé/ lživé/ nezávislé/ splnitelné/ ekvivalentní**.
   (b) Kolik má T **modelů**?
   (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních formulí pravdivých v T?
   (d) Lze teorii T axiomatizovat jedním axiomem v DNF?

5. Buď T teorie $\{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}); i \in \mathbb{N}\}$ nad $var(T)$.
   (a) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \rightarrow p_j$ pravdivý v T?
   (b) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \rightarrow (p_j \vee q_j)$ pravdivý v T?

6. Rozhodněte, zda pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí následující vztahy (případně je upravte tak, aby platily).
   (a) $T \models \varphi$ nebo $T \models \neg\varphi$.
   (b) $T \models \varphi \wedge \psi$ právě tehdy když $T \models \varphi$ a $T \models \psi$.
   (c) $T \models \varphi \vee \psi$ právě tehdy když $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$.
   (d) Jestliže $T \models \varphi$ a $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie, pak $T \models \psi$.
   (e) Existuje výrok χ takový, že $T \not\models \chi$.

7. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení, případně uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie T a S nad $\mathbb{P}$ platí ($\theta^{\mathbb{P}}(T)$ značí **důsledek** teorie T):
   (a) $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$,
   (b) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cup S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cup \theta^{\mathbb{P}}(S)$,
   (c) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cap S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \theta^{\mathbb{P}}(S)$.

8. Buď $|\mathbb{P}| = n$, $\varphi \in \mathtt{VF}_{\mathbb{P}}$, $|M(\varphi)| = m$.
   (a) Kolik je neekvivalentních výroků takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$?
   (b) V kolika neekvivalentních (resp. neekviv. kompletních) teoriích nad $\mathbb{P}$ platí φ?
   (c) Kolik je neekvivalentních teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?
   (d) Buď navíc $\{\varphi, \psi\}$ sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků χ takových, že $\varphi \vee \psi \models \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?