Výroková a predikátová logika - cvičení 5

1. Rozhodněte, zda pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí následující vztahy (případně je upravte tak, aby platily).

   (a) $T \models \varphi$ nebo $T \models \neg\varphi$.

   (b) $T \models \varphi \wedge \psi$ právě tehdy když $T \models \varphi$ a $T \models \psi$.

   (c) $T \models \varphi \vee \psi$ právě tehdy když $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$.

   (d) Jestliže $T \models \varphi$ a $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie, pak $T \models \psi$.

   (e) Existuje výrok χ takový, že $T \not\models \chi$.

2. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení, případně uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie T a S nad $\mathbb{P}$ platí ($\theta^{\mathbb{P}}(T)$ značí **důsledek** teorie T):

   (a) $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$,

   (b) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cup S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cup \theta^{\mathbb{P}}(S)$,

   (c) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cap S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \theta^{\mathbb{P}}(S)$.

3. Buď $|\mathbb{P}| = n$, $\varphi \in \mathtt{VF}_{\mathbb{P}}$, $|M(\varphi)| = m$.

   (a) Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$?

   (b) V kolika neekvivalentních (resp. neekviv. kompletních) teoriích nad $\mathbb{P}$ platí φ?

   (c) Kolik je neekvivalentních teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?

   (d) Buď navíc $\{\varphi, \psi\}$ sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků χ takových, že $\varphi \vee \psi \models \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?

4. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky.

   (a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,

   (b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$,

   (c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,

   (d) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$,

   (e) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

5. Pomocí tablo metody nalezněte všechny modely následujících teorií.

   (a) $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$,

   (b) $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q); \neg p \rightarrow q; r \rightarrow q\}$,

   (c) $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$.

6. Pomocí tablo metody dokažte či nalezněte protipříklad.

   (a) $\{\neg q; p \vee q\} \models p$,

   (b) $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$,

   (c) $\{p \rightarrow r; p \vee q; \neg s \rightarrow \neg q\} \models (r \rightarrow s)$.

7. Pomocí tablo metody proveďte důkaz Boží existence.

   (Návod. Předpokládejme, že se nemodlíte (pokud se modlíte, předpokládejte, že se nemodlí někdo jiný, a příslušným způsobem pozměňte důkaz). Uvažte následující věty. *Jestliže neexistuje Bůh, pak není pravda, že pokud se modlím, Bůh mé modlitby vyslyší. Nemodlím se.* Na základě jejich pravdivosti dokažte pomocí tablo metody, že Bůh existuje.)

8. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. pro každou teorii T a fle φ, ψ

   $$T \vdash \varphi \to \psi \text{ právě tehdy když } T, \varphi \vdash \psi.$$

9. Ukažte, že každé atomické tablo τ je korektní, tj. shoduje-li se ohodnocení v s položkou v kořeni τ, shoduje se i s nějakou větví v τ.

10. Buď $\mathcal{S}$ spočetný systém (množina) neprázdných konečných množin. Řekneme, že $\mathcal{S}$ má *prostý selektor*, jestliže existuje prostá funkce $f : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ taková, že $f(S) \in S$ pro každé $S \in \mathcal{S}$. Dokažte, že $\mathcal{S}$ má prostý selektor, právě tehdy když každá neprázdná konečná podmnožina $\mathcal{S}$ má prostý selektor.