**Výroková a predikátová logika - cvičení 6**

1. Buď $|\mathbb{P}| = n$, $\varphi \in \texttt{VF}_{\mathbb{P}}$, $|M(\varphi)| = m$.
   (a) V kolika neekvivalentních (resp. neekviv. kompletních) teoriích nad $\mathbb{P}$ platí $\varphi$?
   (b) Kolik je neekvivalentních teorií $T$ nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?
   (c) Buď navíc $\{\varphi, \psi\}$ sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků $\chi$ takových, že $\varphi \vee \psi \models \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?
2. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky.
   (a) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,
   (b) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$,
   (c) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$.
3. Pomocí tablo metody nalezněte všechny modely následujících teorií.
   (a) $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$,
   (b) $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q); \neg p \rightarrow q; r \rightarrow q\}$,
   (c) $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$.
4. Pomocí tablo metody dokažte či nalezněte protipříklad.
   (a) $\{\neg q; p \vee q\} \models p$,
   (b) $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$,
   (c) $\{p \rightarrow r; p \vee q; \neg s \rightarrow \neg q\} \models (r \rightarrow s)$.
5. Dokažte přímo (transformací tabel) **větu o dedukci**, tj. pro každou teorii $T$ a fle $\varphi, \psi$

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě tehdy když } T, \varphi \vdash \psi.$$

6. Ukažte, že každé atomické tablo $\tau$ je **korektní**, tj. shoduje-li se ohodnocení $v$ s položkou v kořeni $\tau$, shoduje se i s nějakou větví v $\tau$.
7. Buď $\mathcal{S}$ spočetný systém (množina) neprázdných konečných množin. Řekneme, že $\mathcal{S}$ má *prostý selektor*, jestliže existuje prostá funkce $f : \mathcal{S} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$ taková, že $f(S) \in S$ pro každé $S \in \mathcal{S}$. Dokažte, že $\mathcal{S}$ má prostý selektor, právě tehdy když každá neprázdná konečná podmnožina $\mathcal{S}$ má prostý selektor.
8. Buď $\varphi$ výrok $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.
   (a) Sestrojte tablo důkaz výroku $\varphi$
   (b) Převeďte $\neg\varphi$ do CNF a **množinové reprezentace**.
   (c) Nalezněte **rezoluční vyvrácení** $\neg\varphi$, tj. důkaz $\varphi$.
9. Vyvraťte rezolucí následující výroky.
   (a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$,
   (b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$

10. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \to \neg q, \neg q \to \neg r, (r \to p) \to s\}$ platí $s$, tj. ukažte $T \vdash s$.

11. Ukažte, že je-li $S = \{C_1, C_2\}$ splnitelná a $C$ je rezolventa $C_1, C_2$, pak i $C$ je splnitelná.

12. Sestrojte **strom dosazení** pro formuli $S = \{\{p, r\}\{q, \neg r\}\{\neg q\}\{\neg p, t\}\{\neg s\}\{s, \neg t\}\}$. Je $S$ splnitelná?