Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 7

19. listopadu 2013

1. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.
   (a) $(\exists x)(\forall y)P(y,z) \vee (y = 0)$
   (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
   (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$
2. Nechť φ je formule $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které termy jsou substituovatelné do φ za její proměnné?
   (a) term z za proměnnou x, term y za proměnnou x,
   (b) term z za proměnnou y, term $2 * y$ za proměnnou y,
   (c) term x za proměnnou z, term y za proměnnou z,
3. Jsou následující formule variantou formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?
   (a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
   (b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
   (c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$
4. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a,b,c,d\}, \rhd^A)$ pro jazyk s jediným binárním relačním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a,c),(b,c),(c,c),(c,d)\}$. Určete, zda jsou následující formule v pravdivé v $\mathcal{A}$.
   (a) $x \rhd y$
   (b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$
   (c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \to (x \rhd x))$
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$
   (e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$
5. Pro každou formuli φ z předchozího cvičení nalezněte strukturu $\mathcal{B}$ (pokud existuje) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$, právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
6. Rozhodněte, zda jsou následující sentence (logicky) pravdivé / lživé / nezávislé.
   (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$
   (b) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
   (c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to ((\forall x)(P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
   (d) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$
   (e) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$
7. Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ a sentenci ψ,
   (a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$
   (b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$
   (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$
   (d) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$

   Platí uvedené vztahy i pro formuli ψ, ve které x je volná proměnná? A pro formuli ψ, ve které x není volná?

8. Rozhodněte, zda pro každou formuli φ platí
   (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
   (b) $\models \varphi \to (\forall x)\varphi$
   (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
   (d) $\models \varphi \to (\exists x)\varphi$

9. Uvažme teorii T (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0\rangle$ s rovností, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

   Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T.
   (a) $x + y = y + x$
   (b) $x + y = x \ \to\ y = 0$
   (c) $x + y = 0 \ \to\ y = -x$
   (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

10. Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle\{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0\rangle$, kde binární funkce $+$ je sčítání modulo 4 a unární $-$ je funkce *inverzního* prvku vůči $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.
   (a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie T z předchozího příkladu (tj. *grupou*)?
   (b) Určete generované podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ pro všechna $a \in \mathbb{Z}_4$.
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ i jiné podstruktury?
   (d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem T?
   (e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Z}_4}$?
   (f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. platí v ní 9(a) komutativní grupou?

11. Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi (tvoří *těleso*).
   (a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie T s předchozího příkladu?
   (b) Lze redukt $\langle\mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ expandovat na model T?
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Q}}$?
   (d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

12. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.
   (a) Je T (sémanticky) bezesporná?
   (b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T (sémanticky) kompletní?
   (c) Určete její jednoduché kompletní extenze.
   (d) Je teorie $T' = \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchou extenzí? Je T' konzervativní extenzí?