Výroková a predikátová logika - opravný test, 18. 1. 2016
(15 bodů, 60 minut)

1. Pracujeme v pouze výrokové logice. Buď $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ množina prvovýroků.
   (a) Kolik existuje vzájemně neekvivalentních teorií nad $\mathbb{P}$? (1 bod)
   (b) Kolik existuje vzájemně neekvivalentních kompletních teorií nad $\mathbb{P}$? (1 bod)
   (c) Buď $T = \{p \vee q\}$. Kolik existuje nad $\mathbb{P}$ vzájemně T-neekvivalentních formulí? (2 body)

2. Pro danou teorii T a formuli φ pomocí tablo metody ověřte, zda $T \vdash \varphi$. Pokud vztah platí, zapište příslušný tablo důkaz. Pokud ne, sestrojte na základě dokončeného tabla s bezespornou větví kanonický model (příslušnou větev vhodně označte). Pro jednoduchost pracujte v jazyce bez rovnosti. (Q, R jsou relační symboly příslušné arity, f je unární funkce, x, y proměnné.)
   (a) $T = \{\exists x \forall y (R(y) \to Q(x, y)), \exists y \forall x \neg Q(x, y)\}$, φ je $\exists y \neg R(y)$. (2 body)
   (b) $T = \{\forall x (R(x) \to R(f(f(x)))), \exists x R(x)\}$, φ je $\forall x R(x)$. (3 body)

3. Existuje struktura $\mathcal{A}$ pro jazyk s jedním binárním relačním symbolem R, unárním funkčním symbolem f a dvěma konstantními symboly c_1, c_2, pro niž platí následující? Pokud ano, udejte takovou strukturu. Pokud ne, zdůvodněte. (x, y jsou proměnné.)
   (a) $\mathcal{A} \models \forall x \exists y R(x, y)$ a zároveň $\mathcal{A} \models \forall x \exists y \neg R(x, y)$. (1 bod)
   (b) $\mathcal{A} \models \forall x (f(x) = c_1)$ a zároveň $\mathcal{A} \models f(c_1) = c_2$. (1 bod)

4. Zadané věty zapište jako formule predikátové logiky prvního řádu. Z mimologických symbolů máte k dispozici pouze unární relační symboly D, H a binární relační symbol R, kde $D(x)$, $H(x)$, $R(x, y)$, postupně čteme jako *x je dítě*, *x je hračka*, *x má rád y* .
   (a) Každé dítě má rádo nějakou hračku. (1 bod)
   (b) Existuje hračka, kterou mají rády všechny děti. (1 bod)

5. Odvoďte, je-li to možné, z následující množiny klauzulí pomocí rezoluce prázdnou klauzuli. Odvození znázorněte rezolučním stromem, pro každé použití rezolučního pravidla uveďte použitou unifikaci(substituci). Není-li možné prázdnou klauzuli odvodit, zdůvodněte proč. (P, R jsou relační symboly, f je unární funkční symbol, c je konstanta, x, y proměnné.)

$$\{\{P(x, y), \neg R(c)\}, \{R(x), R(y)\}, \{\neg R(x), \neg R(y), \neg P(c, f(y))\}\} \text{ (2 body)}$$