

Výroková a predikátová logika - cvičení 1

1. Sestavte **pravdivostní tabulky** následujících formulí:

- (a) $p \rightarrow q, \neg q \rightarrow \neg p, \neg p \vee q,$
- (b) $p \rightarrow (q \rightarrow p), p \vee \neg p,$
- (c) $p \rightarrow \neg p, \neg p,$
- (d) $p \wedge (q \vee r), (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$

2. Mějme graf se šesti vrcholy $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Pro $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, i < j$ **prvovýrok** $h_{i,j}$ vyjadřuje, že *vrcholy v_i a v_j jsou spojeny hranou*. S pomocí těchto prvovýroků a výrokových spojek sestavte **formuli** vyjadřující, že *existují tři vrcholy takové, že každé dva z nich jsou spojeny hranou, nebo žádné dva z nich nejsou spojeny hranou*.

3. Mějme **relace** $CH(x, y), D(x), Z(x, y), ZS(x)$ a $S(x, y)$ vyjadřující po řadě, že x je (neostře) chytřejší než y , x je dívka, x zná y , x žije ve Springfieldu, x je sourozenec y , **funkci** $O(x)$, s významem *otec x* , a **konstanty** l, b , s významy *Lisa* a *Bart*. Vyjádřete pomocí nich, výrokových spojek, rovnosti a kvantifikace následující tvrzení:

- (a) Každý, kdo žije ve Springfieldu, zná Bartova otce.
- (b) Lisa je nejchytřejší dívka žijící ve Springfieldu.
- (c) Bart má dva (od něj a od sebe navzájem různé) sourozence.

4. Sestrojte **formule 1. řádu v jazyce s uspořádáním \leq** vyjadřující

- (a) “ x je minimální prvek”,
- (b) “ x je nejmenší prvek”,
- (c) “ x má bezprostředního následníka”.

5. Buď R binární relace na \mathbb{Z} , pro níž platí $\exists x \forall y R(x, y)$ (resp. $\forall y \exists x R(x, y)$). Platí $\forall y \exists x R(x, y)$ (resp. $\exists x \forall y R(x, y)$)?

6. Mějme konečnou hru dvou (střídajících se) hráčů. Hra končí po n kolech výhrou jednoho ze dvou hráčů označených X, Y , přičemž X začíná. Hra je zadána formulí $\varphi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ vyjadřující, že ve hře s tahy $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ vyhrává X . Pomocí kvantifikátorů sestrojte formuli vyjadřující

- (a) “ X nemůže prohrát”, “ Y nemůže prohrát”,
- (b) “ X má vyhrávací strategii”,
- (c) “ Y má vyhrávací strategii”.

7. Sestrojte formule 1. řádu (v **jazyce s rovností**) vyjadřující pro předem dané $n > 0$

- (a) “existuje alespoň n prvků”,
- (b) “existuje nejvýše n prvků”,
- (c) “existuje právě n prvků”.

Jakým způsobem lze vyjádřit “existuje nekonečně mnoho prvků”?

8. Uvažujme **úplný binární strom** (hloubky ω). Kolik vrcholů úrovně n obsahuje? Kolik vrcholů obsahuje? Kolik větví obsahuje?