

### Výroková a predikátová logika - cvičení 3

1. Bud'  $maj_n : {}^3({}^n2) \rightarrow {}^n2$  funkce majoranty po složkách. Množina  $K \subseteq {}^n2$  se nazývá mediánová, jestliže je uzavřena na  $maj_n$ . Ukažte, že  $K$  je mediánová právě tehdy když existuje výrok  $\varphi$  v 2-CNF (v  $n$  proměnných) takový, že  $M(\varphi) = K$ .
2. Mějme množinu prvovýroků  $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$  a teorii (nad  $\mathbb{P}$ )  $T = \{r; p \rightarrow q\}$ .
  - (a) Uveďte příklady výroků takových, že jsou v  $T$  pravdivé/ lživé/ nezávislé/ splnitelné/ ekvivalentní.
  - (b) Kolik má  $T$  modelů?
  - (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních formulí pravdivých v  $T$ ?
  - (d) Lze teorii  $T$  axiomatizovat jedním axiomem v DNF?
3. Bud'  $T$  teorie  $\{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}); i \in \mathbb{N}\}$  nad  $var(T)$ .
  - (a) Pro která  $i, j \in \mathbb{N}$  je výrok tvaru  $p_i \rightarrow p_j$  pravdivý v  $T$ ?
  - (b) Pro která  $i, j \in \mathbb{N}$  je výrok tvaru  $p_i \rightarrow (p_j \vee q_j)$  pravdivý v  $T$ ?
4. Rozhodněte, zda pro každou teorii  $T$  a výroky  $\varphi, \psi$  platí následující vztahy (případně je upravte tak, aby platily).
  - (a)  $T \models \varphi$  nebo  $T \models \neg\varphi$ .
  - (b)  $T \models \varphi \wedge \psi$  právě tehdy když  $T \models \varphi$  a  $T \models \psi$ .
  - (c)  $T \models \varphi \vee \psi$  právě tehdy když  $T \models \varphi$  nebo  $T \models \psi$ .
  - (d) Jestliže  $T \models \varphi$  a  $\varphi \rightarrow \psi$  je tautologie, pak  $T \models \psi$ .
  - (e) Existuje výrok  $\chi$  takový, že  $T \not\models \chi$ .
5. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení, případně uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie  $T$  a  $S$  nad  $\mathbb{P}$  platí:
  - (a)  $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$ ,
  - (b)  $\theta^{\mathbb{P}}(T \cup S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cup \theta^{\mathbb{P}}(S)$ ,
  - (c)  $\theta^{\mathbb{P}}(T \cap S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \theta^{\mathbb{P}}(S)$ .
6. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky.
  - (a)  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ ,
  - (b)  $p \leftrightarrow \neg\neg p$ ,
  - (c)  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ ,
  - (d)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ ,
  - (e)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ .
7. Pomocí tablo metody nalezněte všechny modely následujících teorií.
  - (a)  $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$ ,
  - (b)  $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q); \neg p \rightarrow q; r \rightarrow q\}$ ,
  - (c)  $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ .

8. Pomocí tablo metody dokažte či nalezněte protipříklad.

(a)  $\{\neg q; p \vee q\} \models p$ ,

(b)  $\{q \rightarrow p; r \rightarrow q; (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$ ,

(c)  $\{p \rightarrow r; p \vee q; \neg s \rightarrow \neg q\} \models (r \rightarrow s)$ .