Výroková a predikátová logika - cvičení 5

1. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení, případně uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie T a S nad $\mathbb{P}$ platí ($\theta^{\mathbb{P}}(T)$ značí **důsledek** teorie T):
   (a) $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$,
   (b) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cup S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cup \theta^{\mathbb{P}}(S)$,
   (c) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cap S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \theta^{\mathbb{P}}(S)$.

2. Buď $|\mathbb{P}| = n$, $\varphi \in \mathtt{VF}_{\mathbb{P}}$, $|M(\varphi)| = m$.
   (a) Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$?
   (b) V kolika neekvivalentních (resp. neekviv. kompletních) teoriích nad $\mathbb{P}$ platí φ?
   (c) Kolik je neekvivalentních teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?
   (d) Buď navíc $\{\varphi, \psi\}$ sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků χ takových, že $\varphi \vee \psi \models \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?

3. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky.
   (a) $p \to (q \to p)$,
   (b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$,
   (c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,
   (d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$,
   (e) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

4. Pomocí tablo metody nalezněte všechny modely následujících teorií.
   (a) $\{(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)\}$,
   (b) $\{\neg q \to (\neg p \vee q); \neg p \to q; r \to q\}$,
   (c) $\{q \to p; r \to q; (r \to p) \to s\}$.

5. Pomocí tablo metody dokažte či nalezněte protipříklad.
   (a) $\{\neg q; p \vee q\} \models p$,
   (b) $\{q \to p; r \to q; (r \to p) \to s\} \models s$,
   (c) $\{p \to r; p \vee q; \neg s \to \neg q\} \models (r \to s)$.

6. Buď φ výrok $\neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$.
   (a) Sestrojte tablo důkaz výroku φ
   (b) Převeďte $\neg\varphi$ do CNF a **množinové reprezentace**.
   (c) Nalezněte **rezoluční vyvrácení** $\neg\varphi$, tj. důkaz φ.

7. Vyvraťte rezolucí následující výroky.
   (a) $(p \leftrightarrow (q \to r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$,
   (b) $\neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q)$

8. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \to \neg q, \neg q \to \neg r, (r \to p) \to s\}$ platí s, tj. ukažte $T \vdash s$.

9. Pomocí tablo metody proveďte důkaz Boží existence.

   (Návod. Předpokládejme, že se nemodlíte (pokud se modlíte, předpokládejte, že se nemodlí někdo jiný, a příslušným způsobem pozměňte důkaz). Uvažte následující věty. *Jestliže neexistuje Bůh, pak není pravda, že pokud se modlím, Bůh mé modlitby vyslyší. Nemodlím se.* Na základě jejich pravdivosti dokažte pomocí tablo metody, že Bůh existuje.)