Výroková a predikátová logika - cvičení 6

1. Vyvraťte rezolucí následující výroky.

   (a) $(p \leftrightarrow (q \to r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$,

   (b) $\neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q)$

2. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \to \neg q, \neg q \to \neg r, (r \to p) \to s\}$ platí s, tj. ukažte $T \vdash s$.

3. Zapište následující věty jako formule predikátové logiky prvního řádu (ve vhodně zvoleném **jazyce**).

   (a) Některá přirozená čísla jsou zajímavá a některá ne.

   (b) Existuje nejmenší nezajímavé přirozené číslo. (*To je ale zajímavé číslo!*)

   (c) Existuje někdo, kdo když pije, pijí i všichni ostatní.

   (d) Co tě nezabije, to tě posílí.

   (e) Žádný jednorožec nemá dva rohy.

   (f) Žádný jednorožec, který není zmutovaný, nemá dva rohy.

   (g) Nějaký zmutovaný jednorožec má dva rohy.

4. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na **varianty**, kde se nebudou tytéž proměnné vyskytovat volně i vázaně zároveň.

   (a) $(\exists x)(\forall y)P(x, z) \vee (y = 0)$

   (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$

   (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

5. Buď φ formule $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které termy jsou **substituovatelné** do φ za její proměnné?

   (a) Term z za x, term y za x.

   (b) Term z za y, term $2 \star y$ za y.

   (c) Term x za z, term y za z.

6. Mohou nastat následující situace?

   (a) $\mathcal{A} \models x + x = x$

   (b) $\mathcal{A} \models x + x = x[e_1]$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models x + x = x[e_2]$

   (c) $\mathcal{A} \models \forall x(x + x = x)[e_1]$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \forall x(x + x = x)[e_2]$

   (d) $\mathcal{A} \models x + x \neq x + x[e_1]$

   (e) $\mathcal{A} \models \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \forall x \varphi(x)$

   (f) $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi(x)$

   (g) $\mathcal{A} \models \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x)$

   (h) $\mathcal{A} \not\models \varphi$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$, kde φ je sentence

   (i) $\mathcal{A} \models \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y) \wedge \exists x \forall y(f(y) \neq x)$

7. Rozhodněte, zda jsou následující formule (logicky) **pravdivé/lživé/nezávislé**.

(a) $(\exists x)(\forall y)(P(x,y)) \to (\forall y)(\exists x)(P(x,y))$

(b) $\exists x(x \neq x)$

(c) $\exists x R(x,x) \wedge \forall y \neg R(y,y)$

(d) $\forall x P(x) \wedge \exists y \forall x(x \neq y \to \neg P(x))$

8. Lze následující dvojice formulí rozlišit platností v nějaké struktuře?

   (a) $\varphi \to \exists x \psi$, $\exists x(\varphi \to \psi)$

   (b) $\exists x \varphi \to \psi$,$\forall x(\varphi \to \psi)$