

8. Rozhodněte, zda pro každou formuli φ platí

- (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
- (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
- (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
- (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$

9. Uvažme teorii T (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovnostmi, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x + y) + z \\0 + x &= x = x + 0 \\x + (-x) &= 0 = (-x) + x\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T .

- (a) $x + y = y + x$
 - (b) $x + y = x \rightarrow y = 0$
 - (c) $x + y = 0 \rightarrow y = -x$
 - (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$
10. Uvažme strukturu $\mathbb{Z}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0 \rangle$, kde binární funkce $+$ je sčítání modulo 4 a unární $-$ je funkce *inverzního* prvku vůči $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.
- (a) Je \mathbb{Z}_4 modelem teorie T z předchozího příkladu (tj. *grupou*)?
 - (b) Určete generované podstruktury $\mathbb{Z}_4\langle a \rangle$ pro všechna $a \in \mathbb{Z}_4$.
 - (c) Obsahuje \mathbb{Z}_4 i jiné podstruktury?
 - (d) Je každá podstruktura \mathbb{Z}_4 modelem T ?
 - (e) Je každá podstruktura \mathbb{Z}_4 elementárně ekvivalentní s \mathbb{Z}_4 ?
 - (f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. platí v ní 9(a) komutativní grupou)?
11. Nechť $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi (tvoří *těleso*).
- (a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie T s předchozího příkladu?
 - (b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ expandovat na model T ?
 - (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Q}}$?
 - (d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?
12. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovnostmi.
- (a) Je T (sémanticky) bezesporná?
 - (b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T (sémanticky) kompletní?
 - (c) Určete její jednoduché kompletní extenze.
 - (d) Je teorie $T' = \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ extenzí T ? Je T' jednoduchou extenzí? Je T' konzervativní extenzí?