

Výroková a predikátová logika - cvičení 10

1. Pomocí tablo metody dokažte následující formule, či sestrojte na základě nějaké bezesporné dokončené větve kanonický model jako protipříklad. Pro jednoduchost uvažujte, že pracujeme v jazyce bez rovnosti, pokud se symbol $=$ ve formuli nevyskytuje.

- (a) $\exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$
- (b) $\forall y \exists x R(x, y) \rightarrow \exists x \forall y R(x, y)$
- (c) $x = x$
- (d) $x = y \rightarrow y = x$
- (e) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x P(f(x))$
- (f) $\forall x P(f(x)) \rightarrow \forall x P(x)$
- (g) $\forall x(c = f(x)) \rightarrow \forall x(f(f(x)) = c)$
- (h) $\forall x(f(f(x)) = c) \rightarrow \forall x(f(x) = c)$

2. Víme že,

- (a) Všichni vinni lžou.
- (b) Alespoň jeden obviněný je svědek.
- (c) Svědci nelžou.

Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

3. Dokažte větu o konstantách syntakticky, tj. pomocí transformací tabel.

4. Dokažte větu o dedukci syntakticky, tj. pomocí transformací tabel.

5. Pomocí tablo metody dokažte, že $T \vdash \varphi$, či sestrojte na základě nějaké bezesporné dokončené větve kanonický model jako protipříklad. Pro jednoduchost uvažujte, že pracujeme v jazyce bez rovnosti, pokud se symbol $=$ nevyskytuje v žádné z uvedených formulí.

- (a) $T = \{P(c_1), c_1 = c_2\}$, φ je $P(c_2)$
- (b) $T = \{P(f(x))\}$, φ je $P(x)$
- (c) $T = \{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg Q(x)\}$, φ je $\exists x P(x)$
- (d) $T = \{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg Q(x)\}$, φ je $\forall x P(x)$

6. Bud' T teorie struktury přirozených čísel v jazyce $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$.

- (a) Definujte binární relaci \leq (v jejím obvyklém významu) formulí jazyka \mathcal{L} .
- (b) Bud' T' extenze teorie T o definici relace \leq . Jsou T' a T ekvivalentní? Je T' jednoduché/konzervativní rozšíření T ?
- (c) Definujte formulí jazyka \mathcal{L} unární relaci P tak, aby její realizací ve výchozí struktuře přirozených čísel byla právě všechna prvočísla.
- (d) Definujte formulí jazyka \mathcal{L} konstantu 2 a funkci $m(x) = x \bmod 3$.
- (e) Bud' T'' rozšíření teorie T o všechny výše uvedené definice. Napište formule jazyka \mathcal{L} , které jsou T'' -ekvivalentní formulím $P(2)$, $\forall x(m(x) \leq 2)$.