Výroková a predikátová logika - cvičení 3

1. Kolik výroků lze sestavit z n prvovýroků? Kolik neekvivalentních výroků lze sestavit z n prvovýroků?

2. Mějme k dispozici $n \geq 2$ prvovýroků a dvě navzájem různá výroková ohodnocení v_1, v_2.

   (a) Kolik existuje navzájem neekvivalentních výroků platných ve v_1?

   (b) Kolik existuje navzájem neekvivalentních výroků platných ve v_1 a neplatných ve v_2?

   (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních tautologií platných ve v_1?

   (d) Kolik existuje navzájem neekvivalentních prvovýroků platných ve v_1?

3. Mějme k dispozici $n \geq 2$ prvovýroků a formuli φ splněnou právě dvěma různými ohodnoceními v_1, v_2. Kolik existuje navzájem neekvivalentních formulí ψ takových, že $\varphi \to \psi$ je tautologie?

4. Mějme množinu prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$ a teorii (nad $\mathbb{P}$) $T = \{r; p \to q\}$.

   (a) Uveďte příklady výroků takových, že jsou v T pravdivé/ lživé/ nezávislé/ splnitelné/ ekvivalentní.

   (b) Kolik má T modelů?

   (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních formulí pravdivých v T?

   (d) Lze teorii T axiomatizovat jedním axiomem v DNF?

5. Buď T teorie $\{p_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}); i \in \mathbb{N}\}$ nad $var(T)$.

   (a) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \to p_j$ pravdivý v T?

   (b) Pro která $i, j \in \mathbb{N}$ je výrok tvaru $p_i \to (p_j \vee q_j)$ pravdivý v T?

6. Rozhodněte, zda pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí následující vztahy (případně je „vhodně“ upravte tak, aby platily).

   (a) $T \vDash \varphi$ nebo $T \vDash \neg\varphi$.

   (b) $T \vDash \varphi \wedge \psi$ právě tehdy když $T \vDash \varphi$ a $T \vDash \psi$.

   (c) $T \vDash \varphi \vee \psi$ právě tehdy když $T \vDash \varphi$ nebo $T \vDash \psi$.

   (d) Jestliže $T \vDash \varphi$ a $\varphi \to \psi$ je tautologie, pak $T \vDash \psi$.

   (e) Existuje výrok χ takový, že $T \nvDash \chi$.

7. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení, případně uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie T a S nad $\mathbb{P}$ platí ($\theta^{\mathbb{P}}(T)$ značí důsledek teorie T):

   (a) $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$,

   (b) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cup S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cup \theta^{\mathbb{P}}(S)$,

   (c) $\theta^{\mathbb{P}}(T \cap S) = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \theta^{\mathbb{P}}(S)$.

   Proveďte totéž v situaci, kdy množinu důsledků teorie nahradíme množinou modelů teorie.

8. Buď $|\mathbb{P}| = n$, $\varphi \in \mathtt{VF}_{\mathbb{P}}$, $|M(\varphi)| = m$.

   (a) Kolik je neekvivalentních výroků takových, že $\varphi \vDash \psi$ nebo $\psi \vDash \varphi$?

   (b) V kolika neekvivalentních (resp. neekviv. kompletních) teoriích nad $\mathbb{P}$ platí φ?

   (c) Kolik je neekvivalentních teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?

   (d) Buď navíc $\{\varphi, \psi\}$ sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků χ takových, že $\varphi \vee \psi \vDash \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?